SCPY158 Physics II : Part II - Modern Physics

วทฟส๑๕๘ ฟิสิกส์ ๒ : ส่วนที่ ๒ – ฟิสิกส์ยุคใหม่

Course Description (คำอธิบายรายวิชา)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity) กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ฟิสิกส์อะตอม (Atomic Physics) ฟิสิกส์นิวเคลียร์ (Nuclear Physics)

↓

กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics)

หรือ

ทฤษฎีควอนตัม (Quantum Theory)

หรือ

ฟิสิกส์ควอนตัม (Quantum Physics)

ทำไมต้องมี "Quantum Mechanics"

เพราะว่า มี "ปรากฏการณ์" ที่ "เกี่ยวข้องกับ/เกิดขึ้นใน" ระบบที่ "มีขนาดเล็กมากๆ"
ซึ่ง Classical Physics "ไม่" สามารถอธิบายได้ เช่น

(i) การ "แผ่รังสี" ของ "วัตถุ (ดำ)" [(Black)body Radiation]

(ii) ปรากฏการณ์ "โฟโตอิเล็กตริก" (Photoelectric Effect)

(iii) ปรากฏการณ์คอมพ์ตัน (Compton Effect)

(iv) "สเปคตรัมแบบเส้น (line spectrum)" ของ "รังสี" ที่ "อะตอม" แผ่ออกมา

แต่สามารถอธิบายได้ โดยใช้ แนวคิดที่ "ไม่มี" ใน Classical Physics" เช่น

(i) "'คลื่น' แม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Waves)" แสดงสมบัติเป็น "อนุภาค"

(ii) "(ระดับ) พลังงานที่เป็นไปได้" มีค่า "ไม่ต่อเนื่อง"

(iii) "การปลดปล่อยพลังงานในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า" (หรือ "การแผ่รังสี")
เกิดขึ้นเมื่อมี "การเปลี่ยนระดับพลังงาน"

ใน Classical Physics : "คลื่น" กับ "อนุภาค" เป็นสิ่งที่ "ต่างกันอย่างชัดเจน"

ใน Quantum Physics : "คลื่น" ↔ "อนุภาค"

("คลื่น" สามารถแสดงสมบัติเป็น "อนุภาค" & "อนุภาค" สามารถแสดงสมบัติเป็น "คลื่น")

Quantum Physics

ยุคแรก (~ ก่อน ค.ศ. 1926)

"ความเป็นอนุภาค" ของ "คลื่น"

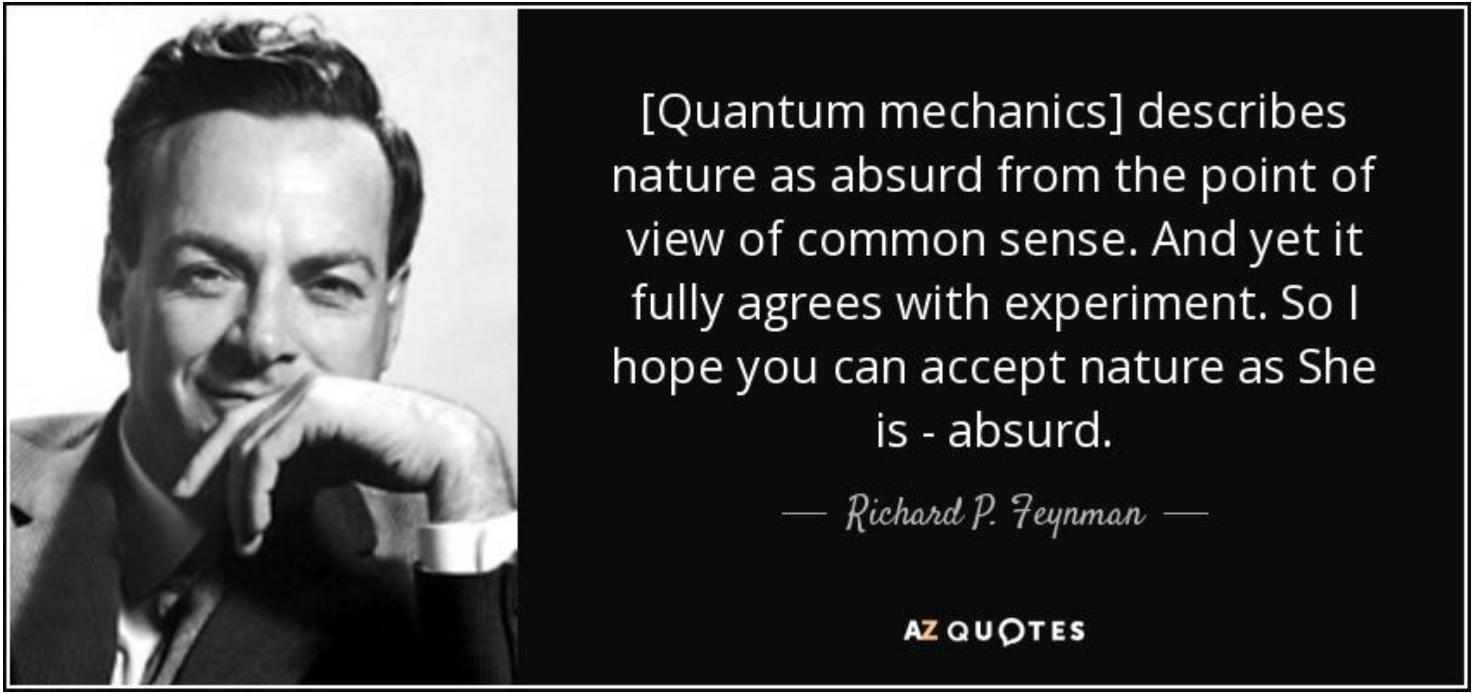
"แบบจำลองอะตอมไฮโดรเจน" ของ "โบร์"
(Bohr's Model of Hydrogen Atom)

ยุคใหม่ (~ หลัง ค.ศ. 1926)

เน้น "ความเป็นคลื่น" ของ "อนุภาค"
บรรยาย "(พฤติกรรมของ) อนุภาค" โดยใช้
"ฟังก์ชันคลื่น (wave function)" ซึ่งเป็น
ไปตาม "สมการ (คลื่น) ของชโรดิงเงอร์"
(Schroedinger Wave Equation)

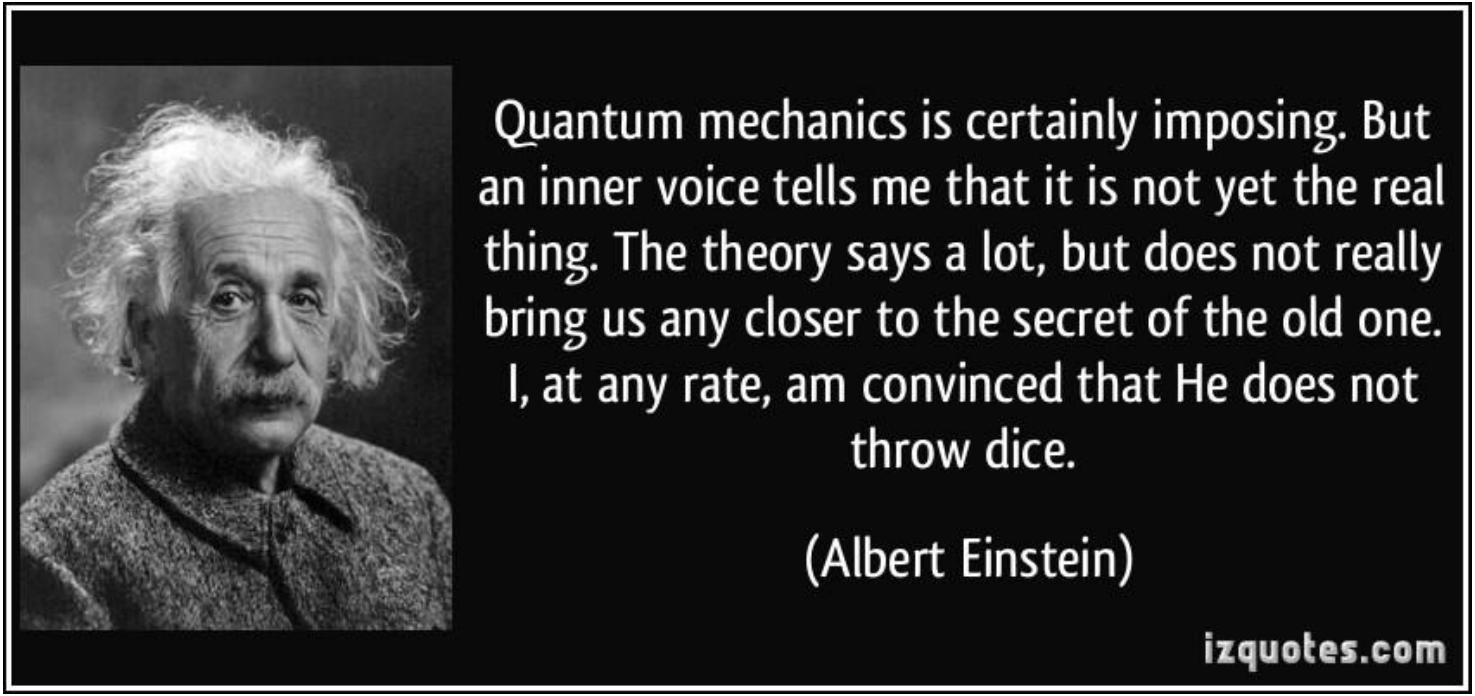
↓

"ความน่าจะเป็น (probability)"



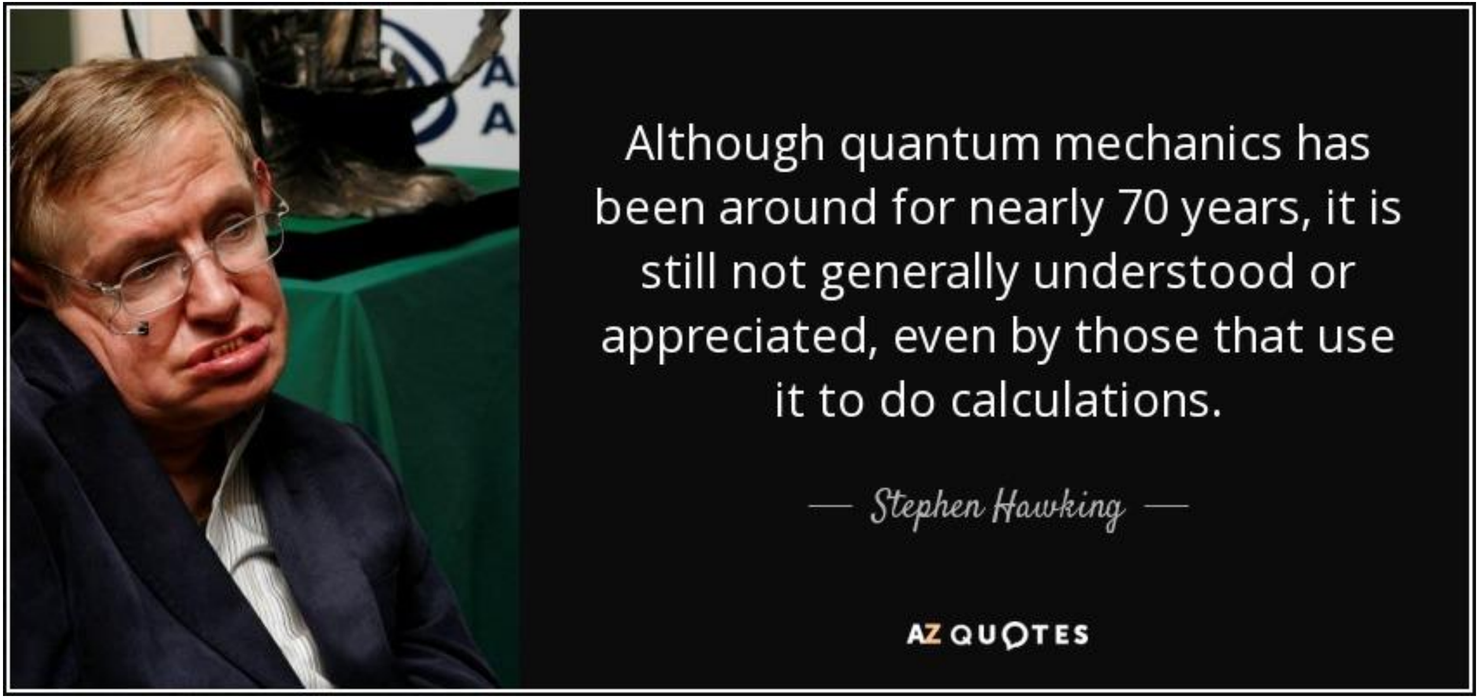
http://www.azquotes.com/quote/460292

[absurd (adj) = (*i*) unreasonable; not sensible (*ii*) ridiculous; foolish in a funny way]

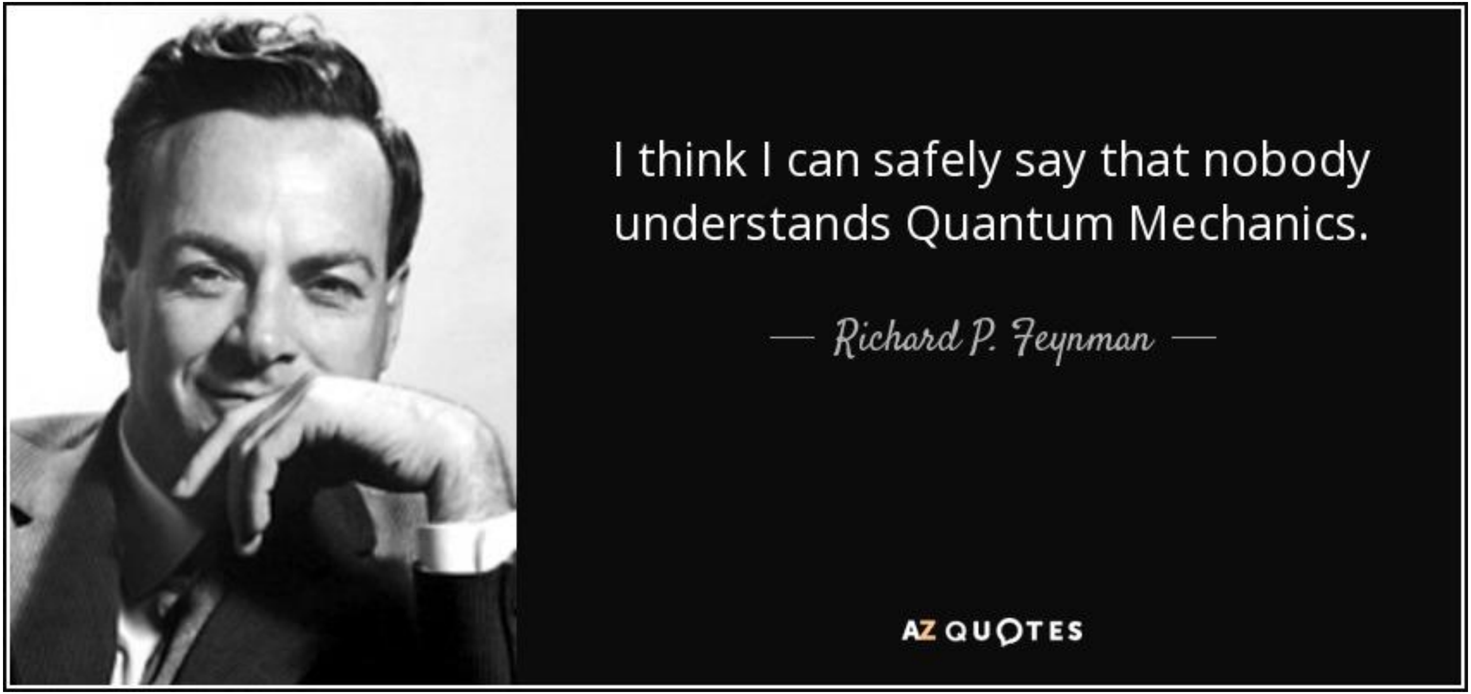


http://izquotes.com/quote/226488

(imposing ≈ impressive)



http://www.azquotes.com/quote/475250



http://www.azquotes.com/quote/564056

“หัวข้อที่จะศึกษา” ใน “Quantum Mechanics”

(1) “การแผ่รังสี” ของ “วัตถุดำ” (Blackbody Radiation)

(2) ปรากฏการณ์ “โฟโตอิเล็กตริก” (Photoelectric Effect)

(3) ปรากฏการณ์ “คอมพ์ตัน” (Compton Effect)

(4) “ความเสถียร” ของ “อะตอม” และ “สเปกตรัม” ของ “อะตอม” (Atomic Stability and Atomic Spectra)

(5) “แบบจำลองอะตอมไฮโดรเจน” ของ “โบร์” (Bohr’s Model of Hydrogen Atom)

(6) “สมบัติความเป็นคลื่น” ของ “อนุภาค” (Wave Property of Particles)

(7) “ฟังก์ชันคลื่น” ของ “อนุภาค” (Wave Function of Particle)

(8) “ฟังก์ชันคลื่น” และ “ความน่าจะเป็น” (“ฟังก์ชันคลื่น” บอก “อะไร” กับเรา)

(9) “สมการคลื่น” ของ “ชโรดิงเจอร์” (Schroedinger Wave Equation)

(10) ตัวอย่างการใช้ “สมการคลื่น” ของ “ชโรดิงเจอร์”

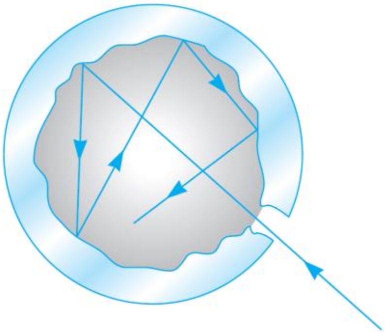
(10.1) อนุภาคอิสระ (“Free” Particles)

(10.2) อนุภาคในบ่อศักย์หนึ่งมิติสูงอนันต์

(10.3) อนุภาคในบ่อศักย์หนึ่งมิติที่มีความสูงจำกัด

(1) “การแผ่รังสี” ของ “วัตถุดำ” (Blackbody Radiation)

“วัตถุดำ” ≡ “วัตถุ” หรือ “ระบบ” ที่ “ดูดกลืนรังสีทั้งหมดที่ตกกระทบตัวมัน”
โดย “ไม่สะท้อนรังสีเลย” แล้วจึง “แผ่รังสี” ออกมาภายหลัง เช่น



“Modern Physics” – Raymond A. Serway, Clement. J. Moses and Curt. A. Moyer – 3e (2005) – page 69

“ปากโพรง” จะทำหน้าที่เสมือนเป็น “วัตถุดำ”

Experimental Facts:

(i) วัตถุ "ทุกชนิด" ที่มี "อุณหภูมิสัมบูรณ์ สูงกว่า 0 Kelvin" จะ "แผ่รังสี" ออกมา โดย "พลังงานที่แผ่ออกมา" จะมี "การกระจาย" กับ "ความยาวคลื่น (wavelength, λ)" [หรือ "ความถี่ (frequency, f)"] อย่าง "ต่อเนื่อง"

(ii) "ลักษณะ" ของ "การกระจาย" ของ "พลังงาน" ที่วัตถุ "แผ่ออกมา" ต่อ "หนึ่งหน่วยเวลา" ต่อ "หนึ่งหน่วยพื้นที่" กับ "ความยาวคลื่น λ" (หรือ "ความถี่ f") จะขึ้นกับ "อุณหภูมิสัมบูรณ์" เท่านั้น โดย "ไม่ขึ้น" กับ "ชนิด" "ขนาด" และ "รูปร่าง" ของวัตถุ

"พลังงาน" ต่อ "หนึ่งหน่วยเวลา" ≡ "กำลัง (Power)"

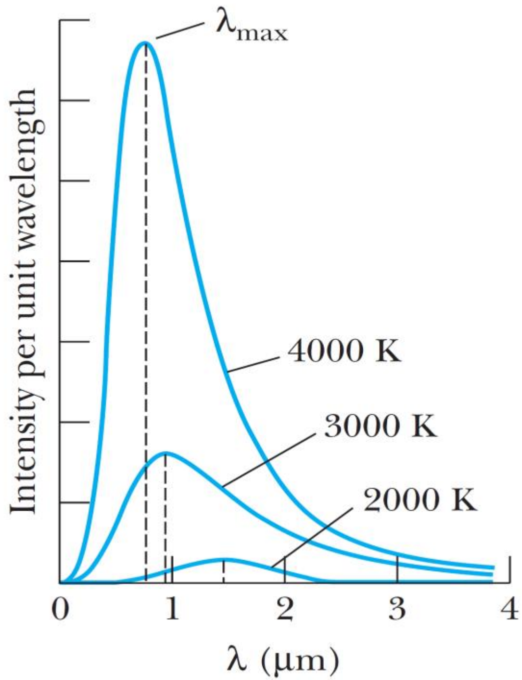
ใน "ระบบ SI" จะมีหน่วยเป็น "จูลต่อวินาที (J/s)" หรือ "วัตต์ (W)"

"พลังงาน" ต่อ "หนึ่งหน่วยเวลา" ต่อ "หนึ่งหน่วยพื้นที่" ≡ "ความเข้ม (Intensity)"

ใน "ระบบ SI" จะมีหน่วยเป็น "วัตต์ต่อตารางเมตร (W/m^2)"

"พลังงาน" ที่ "วัตถุดำ" ที่มี "อุณหภูมิสัมบูรณ์ T " แผ่ออกมา
ต่อ "หนึ่งหน่วยเวลา" ต่อ "หนึ่งหน่วยพื้นที่" ที่ "ความยาวคลื่น λ"

$$J(\lambda, T)$$



"Modern Physics" – Raymond A. Serway, Clement. J. Moses and Curt. A. Moyer - 3e (2005) – page 68

(iii) กฎ (การกระจัด) ของวีน [Wein's (Displacement) Law] :

"ความยาวคลื่น" ของ "รังสีที่แผ่ออกมา" ที่มี "ความเข้มสูงสุด" (λ_{max})
จะ "เพิ่มขึ้น" เมื่อ "อุณหภูมิลดลง"

$$\lambda_{max}(T) = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{K})}{T\ (\mathrm{K})}$$

"Wein's (Displacement) Law"

(iv) กฎของสเตฟาน (Stefan's Law) :

$P_{total}(T) \equiv$ "กำลังทั้งหมด" ที่ "วัตถุดำ" ที่มีอุณหภูมิสัมบูรณ์ T(K) "แผ่ออกมา" ["พลังงานทั้งหมด" ที่ "วัตถุดำ" ที่มีอุณหภูมิ T (K) "แผ่ออกมา" ต่อ "หนึ่งหน่วยเวลา" รวมทุก "ความยาวคลื่น λ" และ ทุก "พื้นที่ผิวของวัตถุดำ"] จะ "แปรผันตรง" กับ "พื้นที่ผิว" ของ "วัตถุดำ" และ "แปรผันตรง" กับ "กำลังสี่" ของ "อุณหภูมิสัมบูรณ์" ของ "วัตถุดำ"

$$\left.\begin{array}{l} P_{total}(T) \propto A \\ P_{total}(T) \propto T^4 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_{total}(T) = \sigma A T^4}$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$$

คือ “ค่าคงตัวสเตฟาน-โบลต์มานน์ (Stefan-Boltzmann constant)”

{$P_{total}(T)$ จะ “แปรผันตรง” กับ “พื้นที่ใต้กราฟ” ระหว่าง “$J(\lambda, T)$” กับ “λ”}

สำหรับวัตถุโดยทั่วไปจะได้

$$\boxed{P_{total}(T) = e\sigma A T^4}$$

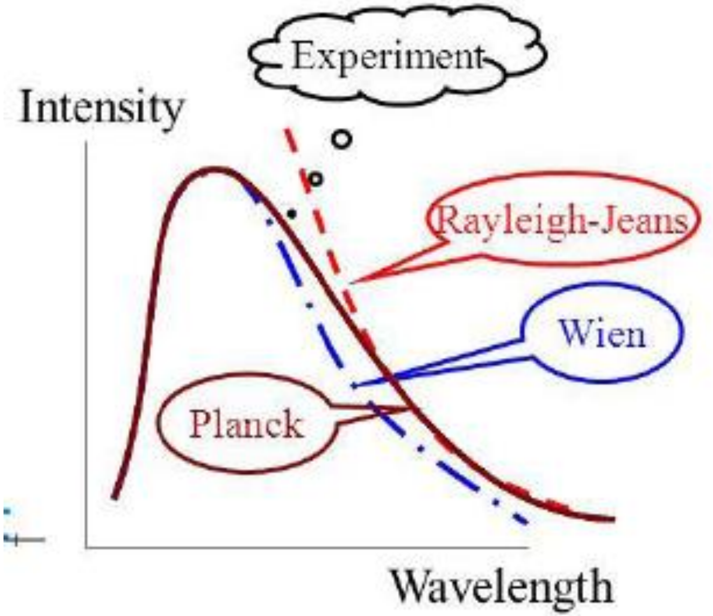
“กฎของสเตฟาน (Stefan’s Law)”

“e” คือ “สัมประสิทธิ์การปล่อยรังสี (emissivity)”

มีค่า “น้อยกว่า 1” สำหรับ “วัตถุทั่วไป” และมีค่า “เท่ากับ 1” สำหรับ “วัตถุดำ”

Theoretical Explanation:

(i) "Classical Physics" อธิบายผลการทดลอง "ไม่ได้"



http://images.slideplayer.com/32/9874489/slides/slide_4.jpg

(ii) ในปี 1900 “Max Planck” พบว่า “สมการที่สามารถบรรยายผลการทดลองได้” คือ

$$J(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^5} \frac{1}{e^{B/\lambda T} - 1}$$

“Planck’s Empirical Radiation Formula”

“A” และ “B” เป็น “empirical constants”
(เลือก “ค่า” ให้ “สอดคล้องกับการทดลอง”)

“สมการข้างบน” สามารถ “derive” ได้โดยการตั้ง “สมมุติฐาน” ว่า

(a) “การแผ่รังสี” เกิดขึ้นจาก “การสั่นของโมเลกุล” ซึ่งอยู่ที่ “ผนังภายในโพรง” (เรียกว่า “oscillators”) [เหมือนใน Classical Physics]

(b) “พลังงาน” ที่ “เป็นไปได้” ของ “oscillator” ที่สั่นด้วย “ความถี่ f” คือ

$$E_{oscillator} = nhf \; ; \;\; n = 1, 2, 3, \cdots$$

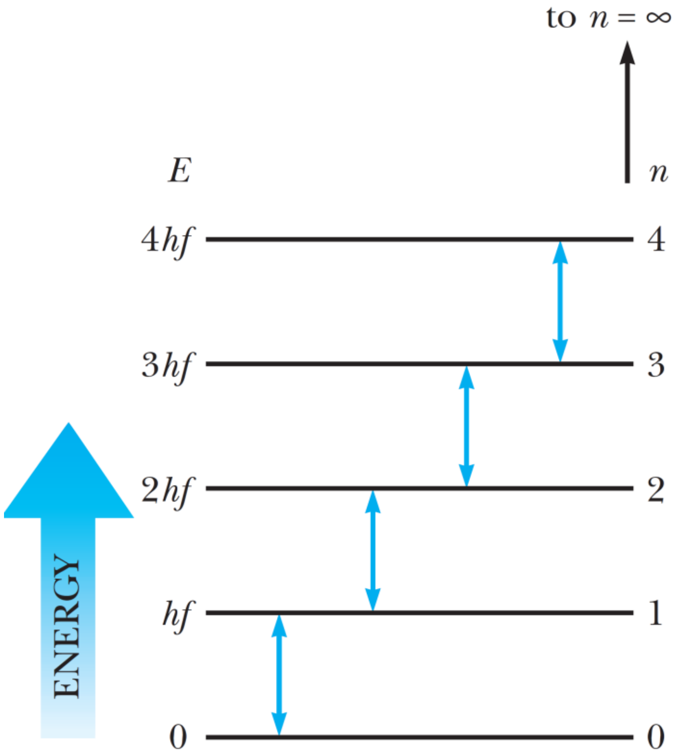
$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ = ค่าคงตัวของพลังค์ (Planck’s Constant)

→ “พลังงาน” ของ “oscillator” มีค่า “ไม่ต่อเนื่อง”

[ใน Classical Physics: “พลังงาน” ของ “oscillator” ขึ้นกับ “กำลังสอง” ของ “amplitude” ซึ่งสามารถมีค่า “เท่าไรก็ได้” และ “ต่อเนื่อง”]

(c) การปลดปล่อยพลังงาน (แผ่รังสี) เกิดขึ้นเมื่อมี “การเปลี่ยนแปลงระดับพลังงาน” ของ “oscillator” โดย “พลังงานที่ปลดปล่อย” จะเท่ากับ “ความต่างของระดับพลังงานที่อยู่ติดกัน”

$$\Delta E = hf$$



“Modern Physics” – Raymond A. Serway, Clement. J. Moses and Curt. A. Moyer - 3e (2005) – page 74

→ "Theoretical expression" ของ empirical constants "A" และ "B" คือ

$$A = 2\pi hc^2 \quad \text{และ} \quad B = \frac{hc}{k_B T}$$

เมื่อ $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ = "Boltzmann's Constant"

ดังนั้น

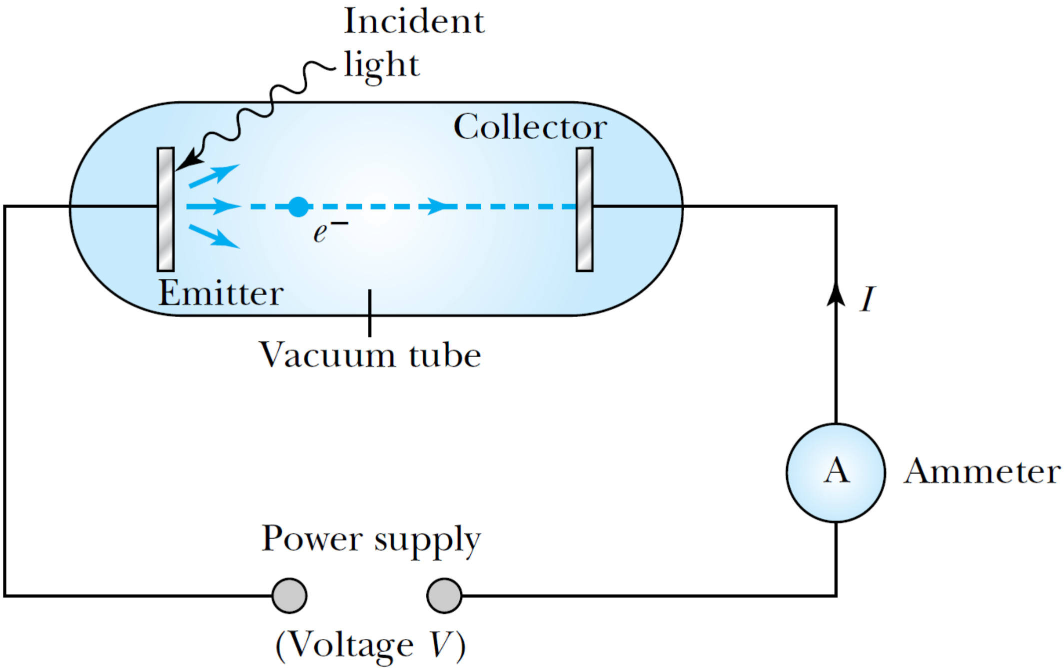
$$J(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

หรือ ในเทอมของ "ความถี่ f"

$$J(f, T) = \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}$$

$$\left\{ \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow d\lambda = \left(\frac{d\lambda}{df}\right) df = \left(\frac{c}{f^2}\right)(-df) \rightarrow J(f, T) = J(\lambda \rightarrow f, T)\left(\frac{c}{f^2}\right) \right\}$$

(2) ปรากฏการณ์ "โฟโตอิเล็กตริก" (Photoelectric Effect)



Modern Physics for Scientists and Engineers - Stephen T. Thornton & Andrew Rex - 4e (2013) – p.103

เมื่อฉาย แสงที่มีความถี่ f "พอเหมาะ" ตกกระทบบน "ผิวโลหะ" จะมี electrons หลุดออกมา

เรียก "ผิวโลหะ" ที่ให้ electrons ออกมา ว่า "Emitter"

และเรียก "electrons ที่หลุดออกมา" ว่า "photoelectrons"

"พอเหมาะ" $\rightarrow$ $f \geq f_0 \equiv$ ความถี่ขีดเริ่ม ("threshold" หรือ "cut off" frequency)

ซึ่งมีค่าขึ้นกับ "ชนิดของโลหะ"

กระบวนนี้ "เกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว" ใช้เวลา "น้อยกว่า 10^{-9} s"

โดย "ไม่ขึ้นกับความเข้ม"

ถ้า $f < f_0$ จะ "ไม่มี electron หลุดออกมา" ไม่ว่าจะเพิ่ม "ความเข้มของแสง" เป็นเท่าใด

{Classical Physics $\rightarrow$ ถ้าเพิ่ม "ความเข้มของแสง" ให้ "มากพอ" จะ "มี electrons หลุดออกมา"}

ถ้า “photoelectrons” สามารถเคลื่อนที่ไปถึง “Collector”

จะเกิด “กระแสไฟฟ้า” ไหลในวงจร

เรียก “กระแสไฟฟ้า” ที่เกิดจาก “photoelectrons” ว่า “photocurrent”

ถ้าจัดให้ “Collector” มี “ศักย์ไฟฟ้า” เป็น “บวก” (เทียบกับ “Emitter”) $\rightarrow$

“photoelectrons” จะถูก “เร่ง” เข้าหา Collector

ถ้า จัดให้ “Collector” มี “ศักย์ไฟฟ้า” เป็น “ลบ” (เทียบกับ “Emitter”) $\rightarrow$

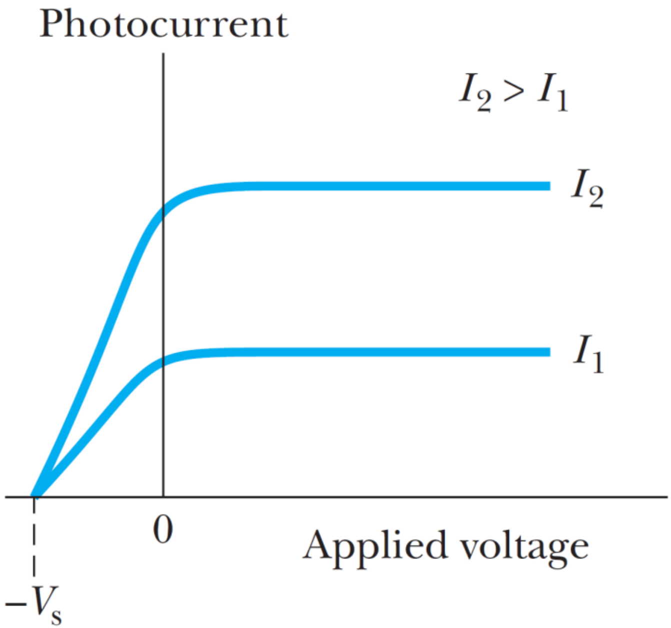
“photoelectrons” จะถูก “ผลัก/หน่วง/ต้าน” ไม่ให้เข้าหา Collector

“stopping voltage” = “ความต่างศักย์หยุดยั้ง”

“ความต่างศักย์” ระหว่าง “Collector” กับ “Emitter” ที่ทำให้ “photocurrent” เป็น “ศูนย์”

ถ้า $f \geq f_0$ การ “เพิ่มความเข้มแสง” จะทำให้ “photocurrent เพิ่มขึ้น”

แต่ “Stopping voltage” จะ “คงเดิม”



“Modern Physics” – Raymond A. Serway, Clement. J. Moses and Curt. A. Moyer - 3e (2005) – page 82

Einstein → "แสง (ซึ่งเป็น electromagnetic wave) ที่มีความถี่ f" ประกอบด้วย (แสดงพฤติกรรมเป็น) "อนุภาค" (เรียกว่า "photon") ที่มี "พลังงาน"

$$E = hf$$

→ เมื่อ "photon ที่มีพลังงาน $E = hf > hf_0$" ชนกับ "electron ของ atom ที่อยู่บนผิวของโลหะ" photon จะถ่ายเทพลังงาน "ทั้งหมด" ของมันให้กับ electron (photon จะถูก "ดูดกลืน")

→ "electron" จะใช้ "พลังงานที่ได้รับส่วนหนึ่ง" ในการ "หนี" จากผิวโลหะ หรือ เอาชนะ "พลังงานยึดเหนี่ยว (binding energy)" ของผิวโลหะ ซึ่งนิยมเรียกว่า "ฟังก์ชันงาน (work function, W)"

$$W = hf_0$$

→ "พลังงานส่วนที่เหลือ" จะเป็น "พลังงานจลน์สูงสุดของ electron (K_{max})"

→ สามารถ "หา K_{max}" ผ่าน การหา "stopping voltage (V_S)"

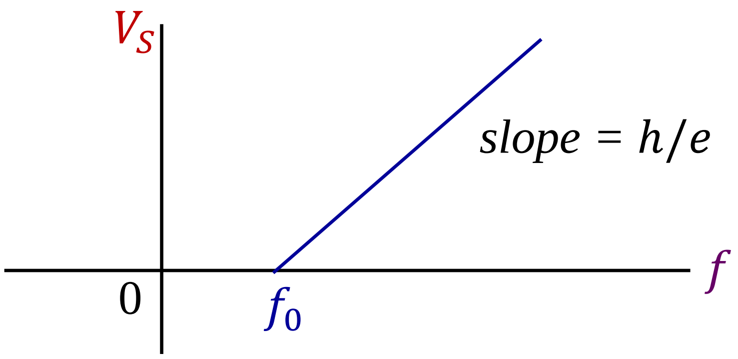
$$K_{max} = eV_S$$

Einstein $\rightarrow$ ใช้ “Conservation of Energy” จะได้

$$hf = W + K_{max} = hf_0 + eV_S \rightarrow hf - hf_0 = eV_S$$

$$\rightarrow \quad eV_S = hf - hf_0$$

“กราฟ” ระหว่าง “stopping voltage (V_S)” กับ “ความถี่ของแสง (f)” จะเป็น “กราฟเส้นตรง” ที่มี “ความชัน” เป็น h/e และมี “f-intercept” อยู่ที่ตำแหน่ง $f = f_0$



(3) ปรากฏการณ์ "คอมพ์ตัน" (Compton Effect)

ยิง/ฉาย "คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า" ที่มี "ความยาวคลื่น λ" (ในช่วงของ X-ray) ไปยัง/ตกกระทบ "แผ่นวัตถุบางๆ" พบว่า

"คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระเจิงออกมา" จะประกอบด้วย

"คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นเดิม λ"

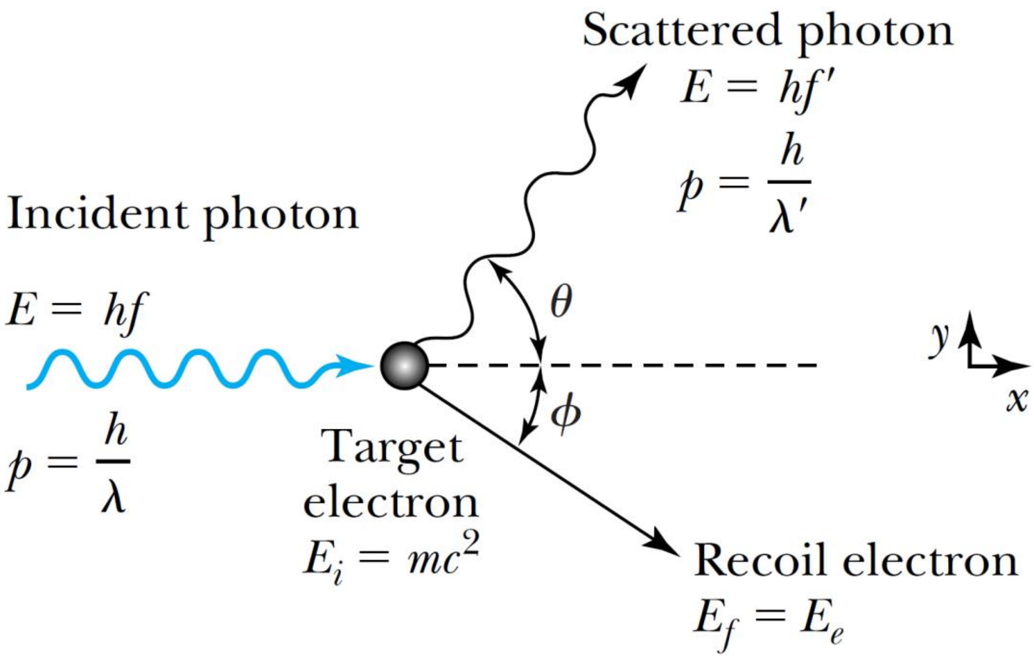
และ "คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่น 'โตขึ้น' $\lambda' > \lambda$"

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

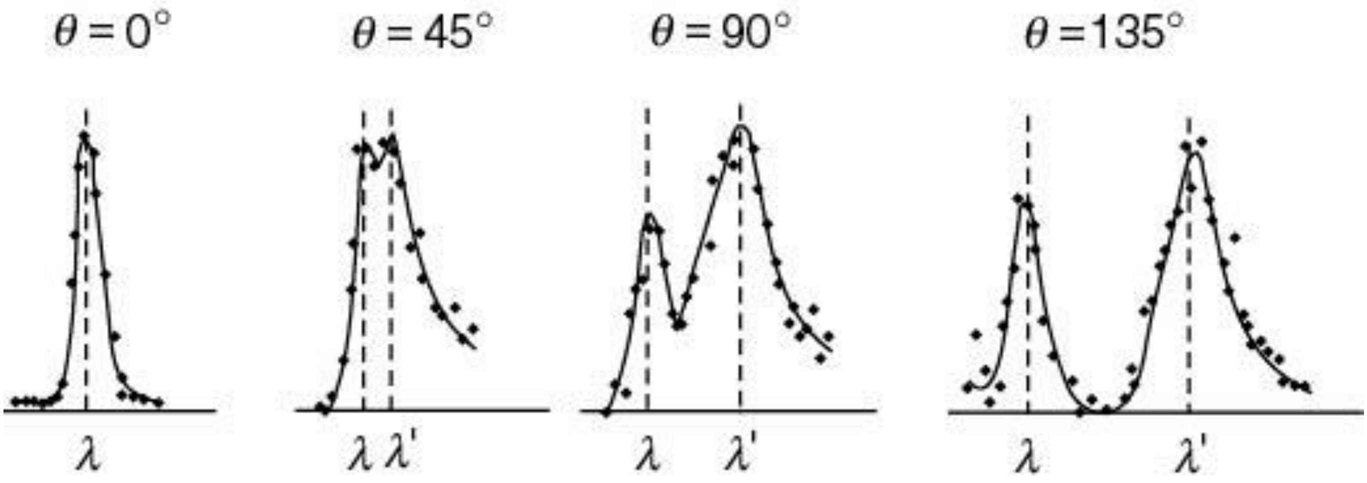
โดยที่ $\lambda_c = \dfrac{h}{mc}$ = "Compton wavelength" ของ "อนุภาคที่มีมวล m"

และ θ คือ "มุมกระเจิง (scattering angle)"

"Classical Physics" อธิบาย ที่มาของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่น $\lambda' > \lambda$ ไม่ได้



Modern Physics for Scientists and Engineers - Stephen T. Thornton & Andrew Rex - 4e (2013) – p.114



http://ne.phys.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld1_E/Part3_E/P37_E/Compton_effect_E.htm

การอธิบายที่มาของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่น $\lambda' > \lambda$

พิจารณา "incident EM wave" ว่า ประกอบด้วย "incident photons" ที่มี "พลังงาน" และ "โมเมนตัม (เชิงเส้น)" เป็น

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{และ} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

เมื่อ "incident photon" ชนกับ "electron ที่อยู่ใน atom ของแผ่นวัตถุ" จะมีการ "ถ่ายเทพลังงาน และ โมเมนตัม (เชิงเส้น) บางส่วนให้กับ electron" ทำให้ "scattered photon" มี "พลังงาน" และ "โมเมนตัม (เชิงเส้น)" ลดลง เป็น

$$E' = hf' = \frac{hc}{\lambda'} \quad \text{และ} \quad p' = \frac{E'}{c} = \frac{h}{\lambda'}$$

พิจารณา "การชนระหว่าง incident photon กับ electron" เป็น "two-particle elastic collision" ซึ่งเป็นไปตาม "conservation of energy" และ "conservation of linear momentum"

เนื่องจาก มี “โอกาส” ที่ electron จะมี “ความเร็วสูง” → ต้องใช้ “Special Relativity”

ใช้ “conservation of energy” : พลังงานรวม “ก่อนชน” = พลังงานรวม “หลังชน”

$$E_{photon}^{before} + E_{electron}^{before} = E_{photon}^{after} + E_{electron}^{after}$$

ก่อนชน photon มีความยาวคลื่น λ → $$E_{photon}^{before} = \frac{hc}{\lambda}$$

หลังชน photon มีความยาวคลื่น λ' → $$E_{photon}^{after} = \frac{hc}{\lambda'}$$

ก่อนชน electron อยู่นิ่ง → $$E_{electron}^{before} = mc^2$$

หลังชน electron เคลื่อนที่ → $$E_{electron}^{after} = E_e = \gamma mc^2 = K_e + mc^2$$

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K_e + mc^2$$

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K_e + mc^2$$

$$\downarrow$$

$$K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \geq 0 \;\rightarrow\; \lambda' \geq \lambda$$

(“พลังงานจลน์” เป็น “บวก” หรือ “ศูนย์” เท่านั้น)

$$E_e = \gamma mc^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$

ใช้ “conservation of (linear) momentum”:

$$x - component: \ \frac{h}{\lambda} = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\theta + (\gamma m v)\cos\phi$$

$$(\gamma m v)\cos\phi = \frac{h}{\lambda} - \left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\theta \qquad \text{(a)}$$

$$y - component: \ 0 = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)\sin\theta - (\gamma m v)\sin\phi$$

$$(\gamma m v)sin\phi = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)\sin\theta \qquad \text{(b)}$$

$$(a)^2 + (b)^2 \ \rightarrow \ (\gamma m v)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\theta$$

$$p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\theta$$

แทน E_e และ p_e ลงใน "relativistic relation" $E_e^2 = p_e^2c^2 + m^2c^4$ จะได้

$$\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} + mc^2\right)^2 = \left[\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\theta\right]c^2 + m^2c^4$$

$$\downarrow$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

ในกรณีที่ "electron ยึดแน่นกับ atom" หรือ "EM waves ที่ใช้มีความยาวคลื่นโต"

"photons ของ EM waves" จะ interact กับ "ทั้ง atom" (ซึ่งมีมวล M)

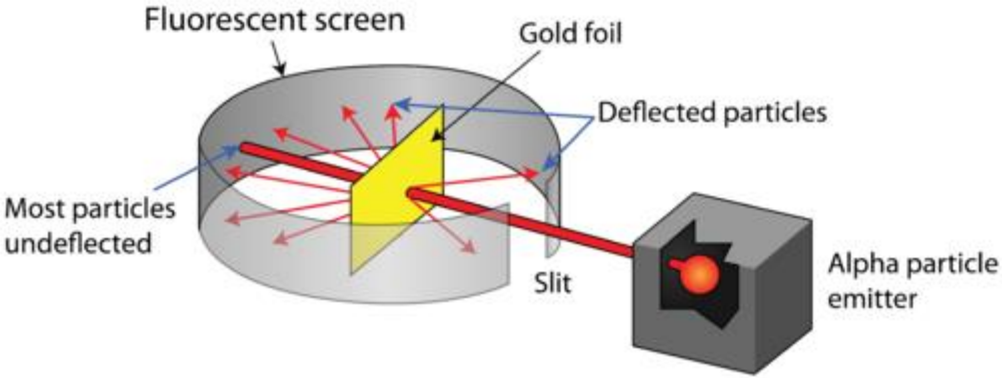
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{Mc}(1 - \cos\theta)$$

"$\Delta\lambda$" จะมีค่า "น้อยมากๆ" จน "สังเกตไม่ได้"

(4) "ความเสถียร" ของ "อะตอม" และ "สเปกตรัม" ของ "อะตอม" (Atomic Stability and Atomic Spectra)

Rutherford's Atomic Model:

ปี 1910: Rutherford's Scattering Experiment ("การกระเจิง" ของ "α–particles" จาก "แผ่นทองคำบางๆ")



http://allaboutrutherford.weebly.com/uploads/4/7/3/0/47309895/2912369_orig.png

ยิง α–particles (“nucleus” ของธาตุ “helium”: ${}^{4}_{2}He$) ที่เกิดจาก “การสลายตัว” ของ “สารกัมมันตรังสี” ไปยัง “แผ่นทองคำบางๆ” พบว่า

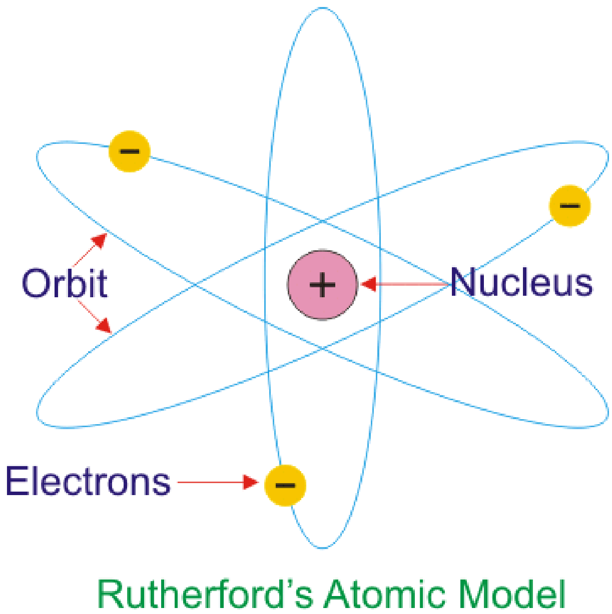
α–particles “ส่วนใหญ่” ทะลุ “ผ่านไป” โดยแทบจะ “ไม่ถูกรบกวนเลย”
มี α–particles “เพียงไม่กี่ตัว” ที่ “กระเจิง” ออกมาด้วย “มุมกระเจิง” ที่มี “ขนาดโต”
[“ชน” กับ “อะไรบางอย่าง” ที่ “เล็กมาก” “แข็งมาก” และ “หนักมาก”]

จากผลการทดลอง Rutherford สรุปว่า

“ประจุบวก” (และ “มวลเกือบทั้งหมดของ atoms”)
จะรวมตัวกันอยู่ภายใน “บริเวณเล็กๆ ตรงจุดศูนย์กลางของ atom”
ซึ่งเรียกว่า “Nucleus”

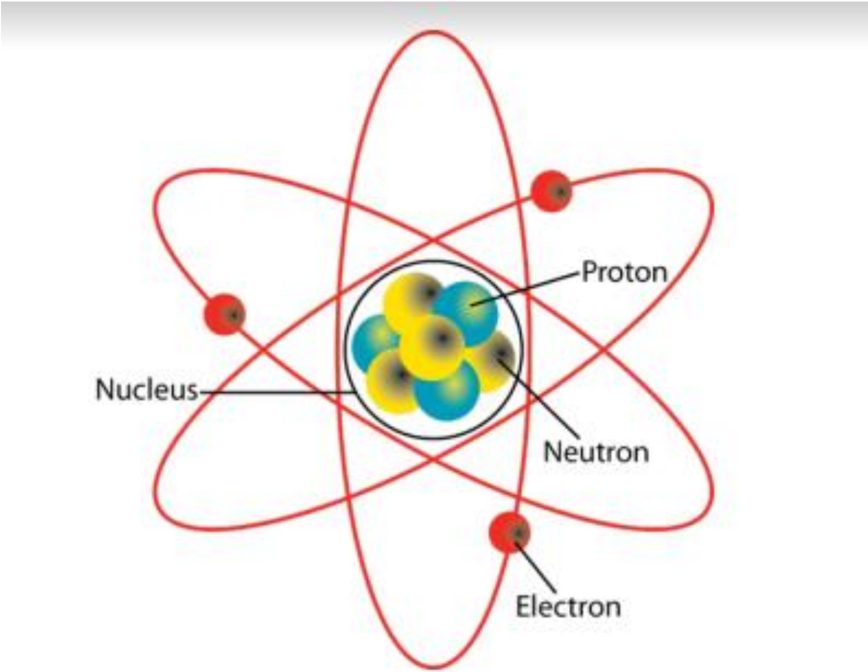
และเรียก “nucleus ของ atom ที่เล็กที่สุด (ซึ่งก็คือ hydrogen)” ว่า “Proton (p)”

→ “Rutherford’s Atomic Model”



https://d2gne97vdumgn3.cloudfront.net/api/file/6wIhLhQJGUo2SlmSpl7w

“โครงสร้าง” ของ “atom” ในปัจจุบัน (ในระดับ Atomic Physics & Nuclear Physics)



http://teachtogether.chedk12.com/uploads/images/redactor/ae15d8287f565c29cf835bd81d92c385.PNG

พื้นที่ส่วนใหญ่ใน atom
จะเป็น "ที่ว่าง"

$Z \equiv$ "Atomic" Number
จำนวน Z ตัว
$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
ประจุ "$-e$"

มวลมาก
ประจุ "$+Ze$"

atom = nucleus + electrons

nucleus → protons, neutrons

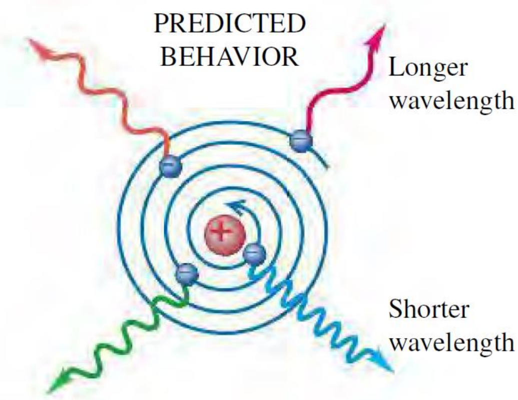
protons:
ประจุ "$+e$"
$m_p = 1.672 \times 10^{-27}$ kg
จำนวน Z ตัว

neutrons:
ประจุ "0" (เป็นกลาง)
$m_n = 1.674 \times 10^{-27}$ kg
จำนวน N ตัว
$N = A - Z$
$A \equiv$ "Mass" Number

"neutron" เป็น "electrically neutral twin" ของ "proton" (มีมวลใกล้เคียงกันมาก)

เรียก "neutron" และ "proton" รวมกันว่า "nucleon"

Classical Mechanics $\rightarrow$ "electrons" ซึ่ง "มีประจุ $-e$" และ "เคลื่อนที่รอบ nucleus" จะมี "ความเร่ง" (อย่างน้อยที่สุดจะมี "ความเร่งสู่ศูนย์กลาง a_c")



Classical Electromagnetism :

$\rightarrow$ "อนุภาคที่มีประจุ" ที่ "เคลื่อนที่" โดย มี "ความเร่ง" จะ "ปล่อย/แผ่ EM waves ออกมา"

$\rightarrow$ "พลังงานของอนุภาค" จะ "ลดลง"

$\rightarrow$ "รัศมีของวงโคจร (r)" จะ "ลดลง"

$\rightarrow$ "atom" จะ "ไม่เสถียร"

(University Physics with Modern Physics – Young and Freedman – 14e (2016), p.1279)

"EM waves ที่แผ่ออกมา" จะมี "ความยาวคลื่น (λ) สั้นลงเรื่อยๆ"

{Classical Electrodynamics $\rightarrow$ "electron" ที่เคลื่อนที่เป็น "วงกลม" (มี a_c) จะปล่อย "EM wave" ที่มี "ความถี่ f_{rad}" เท่ากับ "ความถี่ของการเคลื่อนที่เป็นวงกลม f_{cir}" เมื่อ r ลดลง จะได้ว่า f_{cir} และ f_{rad} เพิ่มขึ้น ดังนั้น λ จะลดลง}

ใน "ความเป็นจริง" เรารู้ว่า

(i) atoms "เสถียร"

และ

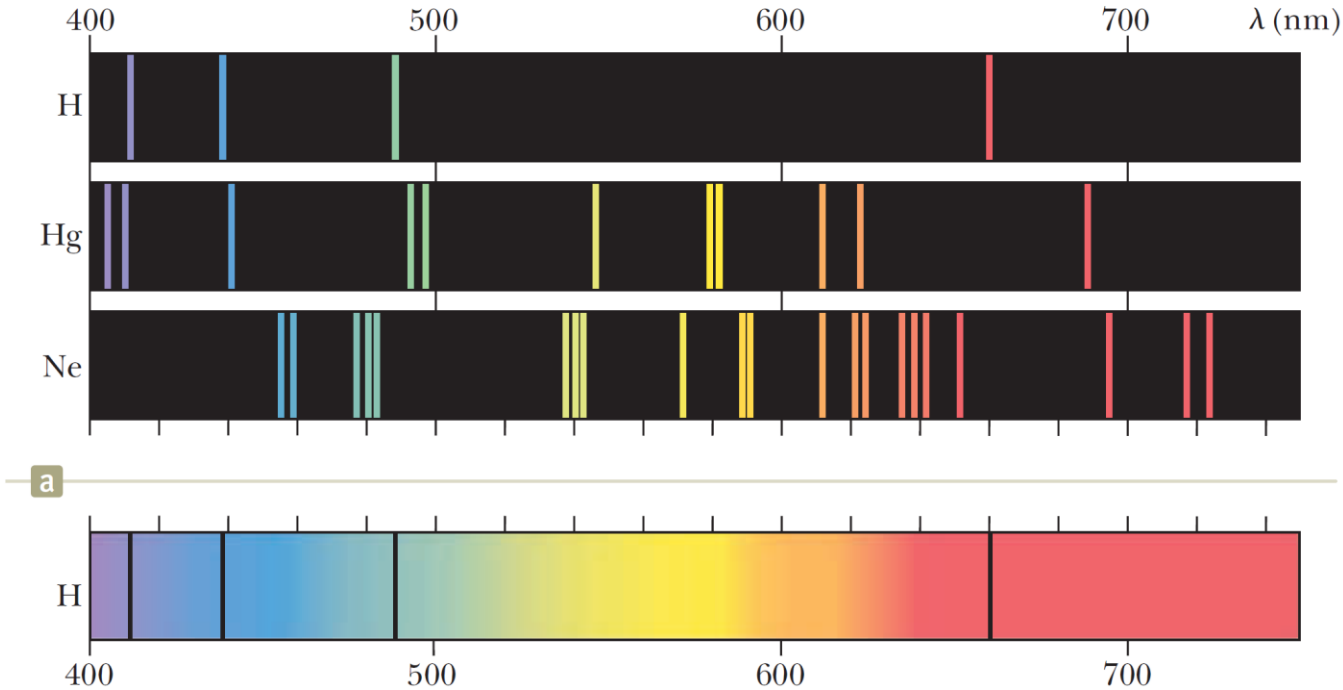
(ii) "EM waves ที่ atom (ของธาตุ) แผ่ออกมา" (เมื่อธาตุอยู่ในสถานะ "ก๊าซ")*
จะมีลักษณะ "ไม่ต่อเนื่อง" โดยมีลักษณะเป็น "เส้น" เรียกว่า
"สเปกตรัมแบบเส้น (Line Spectrum)"

"เครื่องมือ" ที่ใช้ในการ "ศึกษา EM waves ที่ atom แผ่ออกมา" เรียกว่า "Spectrometer"

↓

Classical Physics "ไม่" สามารถอธิบาย "โครงสร้างของอะตอม"

* "EM waves ที่แผ่จาก atom ของธาตุ" ที่อยู่ในสถานะ "ของแข็ง" จะมีลักษณะ "ต่อเนื่อง"

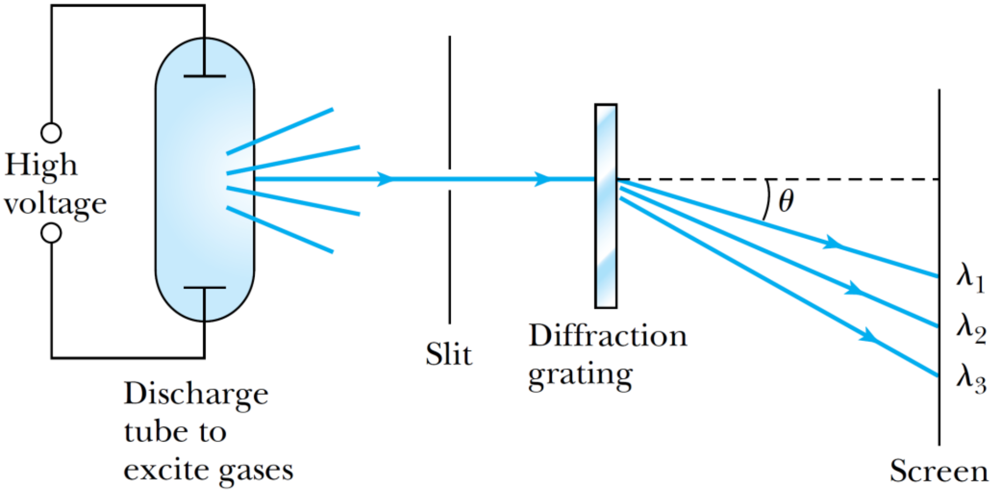


(a) Emission line spectra for hydrogen, mercury, and neon.

(b) Absorption spectrum for hydrogen.

(Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics - Serway & Jewett, Jr. – 8e(2010) p.1253)

“Diffraction Grating Spectrometer”



(Modern Physics for Scientists and Engineers - Stephen T. Thornton & Andrew Rex - 4e (2013) - p. 92)

จาก $d\sin\theta_n = n\lambda$ จะได้ $\lambda \propto \sin\theta \rightarrow \lambda \propto \theta$ ดังนั้น $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$

(ในช่วง $0 \leq \theta \leq 90°$ เมื่อ “มุม θ โตขึ้น” จะได้ “ค่า $\sin\theta$ โตขึ้นด้วย”)

ในทางปฏิบัติ จะมีการใช้ “เลนส์” เพื่อช่วยในการ “รวมแสง”

https://i.ytimg.com/vi/321MA6U7pq8/maxresdefault.jpg

"ตำแหน่ง" ที่จะเกิด "การเลี้ยวเบน" แล้วไป "แทรกสอดแบบเสริม" บน "ฉาก" สำหรับ "แสง" ที่มี "ความยาวคลื่น λ" จะเป็นไปตามสมการ

$$d \sin\theta_n = n\lambda$$

เมื่อ "d" คือ "ระยะห่าง" ระหว่าง "ช่อง" ของ grating

"n" คือ "ลำดับ" ของ "การเลี้ยวเบน": $n = 1, 2, 3, \cdots$

และ "θ_n" คือ "มุมเลี้ยวเบน" สำหรับการเลี้ยวเบน "ลำดับที่ n"

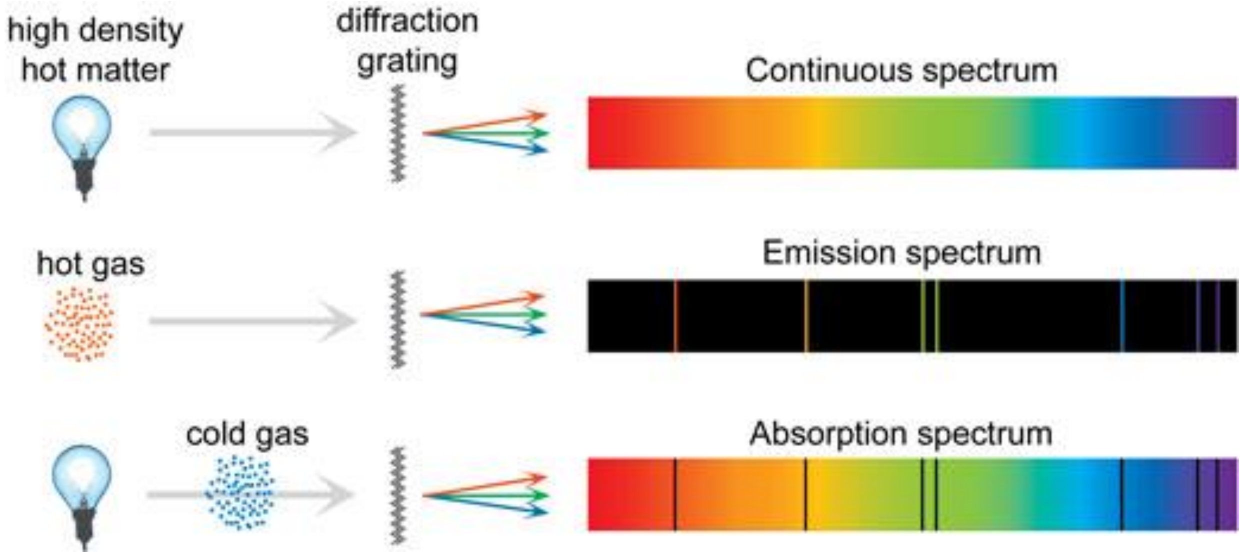
เนื่องจาก (อะตอมของ) ธาตุต่างชนิดกัน จะให้ spectrum ที่ต่างกัน

ดังนั้น โดยการศึกษา spectrum ที่ (อะตอมของ) ธาตุแผ่ออกมา

จะสามารถบอกได้ว่า spectrum นั้นถูกแผ่ออกมาจาก (อะตอมของ) ธาตุใด

การศึกษา EM waves ที่อะตอม “แผ่ออกมา” ≡ “Emission” Spectroscopy → “Emission” Spectrum

การศึกษา EM waves ที่อะตอม “ดูดกลืน” ≡ “Absorption” Spectroscopy → “Absorption” Spectrum



http://s-educat.blogspot.com/2010/05/atomic-spectra.html

Rydberg's Formula {ใช้ได้กับ "one-electron" atoms (เช่น $H, He^{+}, Li^{2+}, \cdots$)}

จากการศึกษา "hydrogen spectrum" ซึ่งประกอบด้วย "spectral lines" ที่ "มีค่าความถี่เฉพาะ" และ "ไม่ต่อเนื่อง" จำนวนมาก พบว่า

สามารถ "แยก spectral lines" ออกเป็น "series"

โดยที่ "ความถี่ของ spectral lines" ที่อยู่ใน "series เดียวกัน"

จะมีความสัมพันธ์กันตาม "Rydberg's formula"

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

โดยที่ (i) λ คือ "ความยาวคลื่น" ของ spectral line

(ii) R_H คือ "Rydberg's Constant" ซึ่งเป็น "empirical constant"

(iii) n_i และ n_f เป็น "จำนวนเต็มบวก (positive integer)" – "ไม่รวมศูนย์"

และ (iv) $n_i > n_f$

ปริมาณที่เป็น "ส่วนกลับ" ของ "ความยาวคลื่น" จะเป็นปริมาณที่บอกถึง "จำนวนลูกคลื่น" ใน "หนึ่งหน่วยความยาว":

$$\frac{1}{\lambda} = \text{"จำนวนลูกคลื่น" ใน "หนึ่งหน่วยความยาว"}$$

("คลื่น 1 ลูก" มี "ความยาว" เท่ากับ "λ" $\rightarrow$ ใน "หนึ่งหน่วยความยาว" จะมี "คลื่น λ^{-1} ลูก")

ใน 'spectroscopy"

(i) นิยมเรียก $\frac{1}{\lambda}$ ว่า "เลขคลื่น (wave number)" ซึ่งเป็นชื่อเดียวกับ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

และ (ii) นิยมใช้ "หน่วย" เป็น cm^{-1} (บอกเราว่า ใน "1 cm" มีลูกคลื่นกี่ลูก)

{"คลื่น 1 ลูก" มีความยาว "λ cm" $\rightarrow$ ใน "1 cm" จะมี "คลื่น λ^{-1} ลูก"}

สำหรับ hydrogen atom : (i) ค่าของ R_H ที่ได้จากการ "การ fit ผลการทดลอง" คือ

$$R_H(\exp) = 1.0967758 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

และ (ii) "ชื่อเรียก" ของ "series" ต่างๆ คือ

$n_f = 1 \;\rightarrow\; n_i = 2, 3, \cdots \;\rightarrow$ "Lyman" series

$n_f = 2 \;\rightarrow\; n_i = 3, 4, \cdots \;\rightarrow$ "Balmer" series (อยู่ในช่วงที่ตามองเห็น)

$n_f = 3 \;\rightarrow\; n_i = 4, 5, \cdots \;\rightarrow$ "Paschen" series

$n_f = 4 \;\rightarrow\; n_i = 5, 6, \cdots \;\rightarrow$ "Brackett" series

$n_f = 5 \;\rightarrow\; n_i = 6, 7, \cdots \;\rightarrow$ "Pfund" series

(5) “แบบจำลอง (ทฤษฎี) อะตอมไฮโดรเจน” ของ “โบร์”
[Bohr’s Model (Theory) of Hydrogen Atom]

ปี 1914 Neil Bohr เสนอ “แบบจำลอง” สำหรับ “hydrogen atom” ซึ่งเป็น “atom ที่เล็กที่สุด” ประกอบด้วย “electron” และ “proton” (ทำหน้าที่เป็น “nucleus”)

(*i*) “electron” เคลื่อนที่ (โคจร) เป็น “วงกลม” รอบ “proton” โดยมี “attractive Coulomb force” ทำหน้าที่เป็น “แรงสู่ศูนย์กลาง (Centripetal Force)” (ในลักษณะเดียวกับ การเคลื่อนที่ของ “ดาวเคราะห์” รอบ “ดวงอาทิตย์”)

(*ii*) มี “วงโคจรพิเศษ” เรียก “Stationary Orbits” → “electron” ที่อยู่ในวงโคจรพิเศษจะ “ไม่มีการสูญเสียพลังงาน” (“ไม่แผ่รังสี” แม้จะมีความเร่ง)

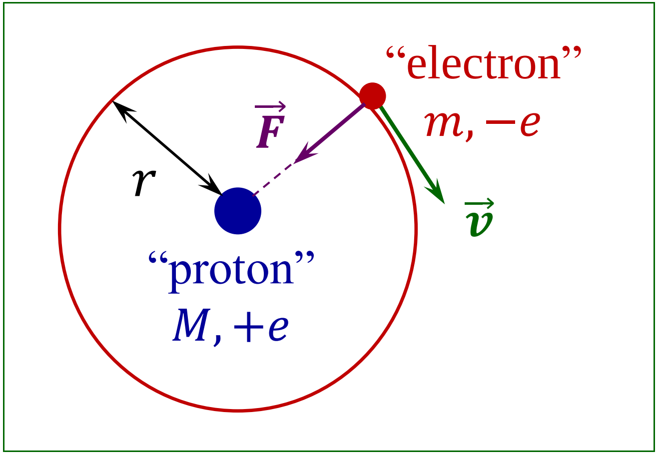
(*iii*) “การปลดปล่อยพลังงาน” ของ “electron” (ในรูป “EM waves”) จะเกิดขึ้นเมื่อมี “การเปลี่ยนวงโคจร” จาก “วงโคจรที่มีพลังงานสูง” มายัง “วงโคจรที่มีพลังงานต่ำกว่า” โดย “ความถี่” ของ “EM wave” ที่ “แผ่ออกมา” จะหาได้จาก

$$E_i - E_f = hf$$

(iv) “เงื่อนไข” ของ “Stationary Orbits” คือ “ขนาด” ของ “โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum, $\vec{L}$)” ของ “electron” มีค่าเป็น “จำนวนเต็มเท่า” ของ “$\hbar$”

$$L = mvr = n\hbar = \frac{nh}{2\pi} \ ; \ n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\{ \text{ Classical Mechanics } \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow L = mvr \sin\theta \ \}$$



ใช้ “Classical (nonrelativistic) Mechanics”

$(i) \rightarrow \vec{F}_{Coulomb} = \vec{F}_{centripetal} \rightarrow$

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r} = ma_C = m\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

$$mv^2 = \frac{ke^2}{r}$$

"รัศมี" ของ "วงโคจร" ที่เป็น "Stationary Orbits":

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}\frac{m}{m} \rightarrow r = \frac{mmv^2r^2}{mke^2} = \frac{(mvr)^2}{mke^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2} \; ; \; n = 1, 2, \cdots}$$

"รัศมี" ของ "วงโคจร" ที่มี "ขนาดเล็กที่สุด" $(n = 1) \rightarrow$

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \equiv a_0 \approx 0.5\ \text{Å} \equiv \text{"Bohr Radius"}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r_n = n^2 a_0 \; ; \; n = 1, 2, \cdots}$$

"ความเร็ว" ของ "electron" ใน "Stationary Orbits":

$$mvr = n\hbar \rightarrow \boxed{v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} = \frac{n\hbar}{m}\left(\frac{mke^2}{n^2\hbar^2}\right) = \frac{ke^2}{n\hbar}}$$

"พลังงานรวม" ของ "hydrogen atom" (E) [assume ว่า proton อยู่นิ่ง (มีมวลมาก)]:

"kinetic energy" ของ "electron"

$$E = K + U$$

"electrical potential energy" ของ "ระบบ" (electron-proton)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

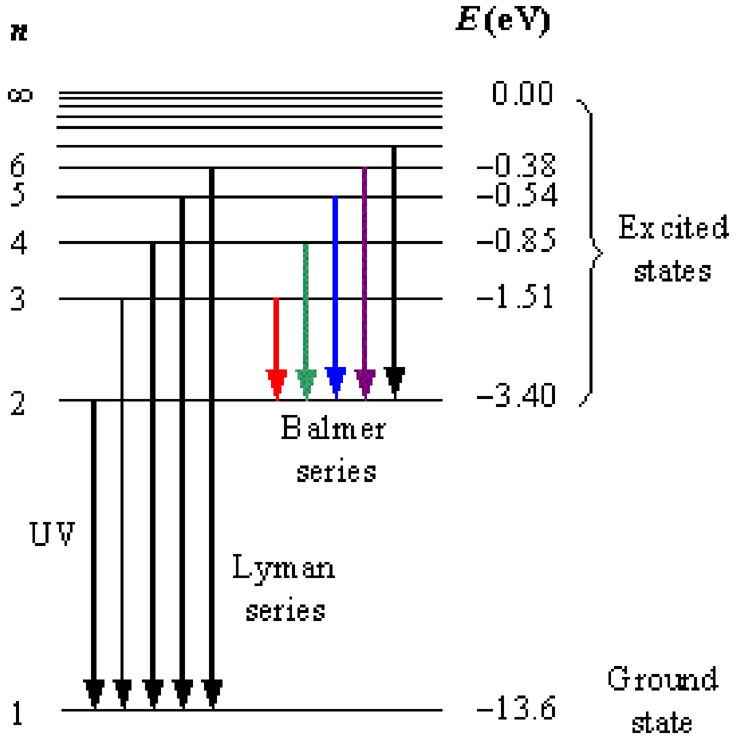
$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{ke^2}{2a_0 n^2} = -\frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{13.6}{n^2}\ \text{eV}$$

"Theoretical Expression" ของ "Rydberg's Constant":

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{E_i - E_f}{h}\right) = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{2\pi^2 mk^2e^4}{h^3c}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$\rightarrow \quad R_H(\text{theory}) = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$$

“Energy Level Diagram” ของ “Hydrogen Atom”:



https://d2gne97vdumgn3.cloudfront.net/api/file/A2Qc9W3Tw6oL7MhOSd71

(6) “สมบัติความเป็นคลื่น” ของ “อนุภาค” (Wave Property of Particles)

“Photoelectric” Effect
“Compton” Scattering

“EM wave” แสดงสมบัติเป็น “อนุภาค”
เรียก “อนุภาค” ของ “EM wave” ว่า
“โฟตอน (photon, γ)”

สำหรับ “EM wave” ที่มี “ความถี่ (frequency, f)” [“ความยาวคลื่น (wavelength, λ)”]:

“พลังงาน” ของ “photon”: $E = hf \rightarrow f = \dfrac{E}{h}$

“พลังงานนิ่ง (rest energy)” ของ “photon” : $E_0 =$ “ศูนย์”

(“photon” เคลื่อนที่ด้วย “อัตราเร็ว c” $\leftrightarrow$ “photon” มี “มวล” เป็น “ศูนย์”)

“โมเมนตัม (เชิงเส้น)” ของ “photon”: $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{hf}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$

{ จาก $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$ จะได้ว่า สำหรับ “photon” (ซึ่งมี $E_0 = 0$) $E = pc$ }

“สมมุติฐาน” ของ “เดอบรอยส์” (de Broglie’s Hypothesis):

ปี 1924 “de Broglie” เสนอว่า

“อนุภาค” ควรจะสามารถแสดง สมบัติเป็น “คลื่น” ได้

เรียก “คลื่น” ของ/ที่เกี่ยวข้องกับ “อนุภาค” ว่า “คลื่นสสาร (Matter Wave)”

สำหรับ “อนุภาค” ที่มี “โมเมนตัม (เชิงเส้น), p” และ “พลังงาน, E” :

“ความยาวคลื่น” ของ “คลื่นสสาร” ≡ ความยาวคลื่น “เดอบรอยด์” (de Broglie’s wavelength) → $\lambda = \dfrac{h}{p}$

“ความถี่” ของ “คลื่นสสาร” ≡ ความถี่ “เดอบรอยด์” (de Broglie’s frequency) → $f = \dfrac{E}{h}$

มี “รูปแบบสมการ” ที่ “เหมือนกับ” กรณีของ “photon” แต่ สำหรับ “คลื่นสสาร” จะได้ว่า

$$f\lambda = \left(\frac{E}{h}\right)\left(\frac{h}{p}\right) = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v} = v_p \ (phase\ velocity) > c$$

“ความเร็วเฟส (phase velocity)” = “ความเร็ว” ของ “จุดหนึ่งๆ บนคลื่น”

“สมมุติฐาน” ของ “เดอบรอยส์” ได้รับการ “ยืนยัน” ความถูกต้อง
โดย “Davisson-Germer ‘Electron Scattering’ Experiment” ในปี 1927

Louis de Broglie (1892-1987)

นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส

1929 Nobel Prize in Physics

“for his discovery of the wave nature of electrons”

This made him the first person to receive
a Nobel Prize on a PhD thesis.

https://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/fotos/broglie_louis.jpg "de Broglie's hypothesis" ช่วยให้ เข้าใจ/อธิบาย "Bohr's atomic theory" ได้ดีขึ้น:

(i) ทำไม เมื่อ "electron" อยู่ใน "วงโคจรพิเศษ" (ที่เรียกว่า "stationary orbits") จึง "ไม่สูญเสียพลังงาน" (ไม่แผ่ "รังสี" หรือ "EM waves")

→ "ความยาวคลื่น" ของ "คลื่นสสาร" ของ "electron" ที่อยู่ใน "stationary orbits" มีค่า "พอดี" ที่จะทำให้เกิด "คลื่นนิ่ง (standing wave)" รอบ "nucleus" ทำให้ "ไม่มีการแผ่ EM waves"

(ii) "ที่มา" ของ "เงื่อนไข" ของ "stationary orbits"

→ "เงื่อนไข" ของ "stationary orbits" สอดคล้องกับ "เงื่อนไข" ของ "การเกิดคลื่นนิ่ง" ของ "electron" รอบ "nucleus":

"ความยาว" ของ "เส้นรอบวง" ของ "วงโคจร" ของ "electron" รอบ "nucleus" เป็น "จำนวนเต็มเท่า" ของ "ความยาวคลื่น" ของ "คลื่นสสาร" ของ "electron"

$$2\pi r_n = n\lambda_n \rightarrow 2\pi r_n = n\left(\frac{h}{p_n}\right) = n\left(\frac{h}{mv_n}\right) \rightarrow mv_n r_n = n\hbar$$

(7) "ฟังก์ชันคลื่น" ของ "อนุภาค" (Wave Function of Particle)

"de Broglie's hypothesis" → "อนุภาค" แสดงสมบัติเป็น "คลื่น" ได้ (เรียก "คลื่นสสาร")

("ยืนยัน" โดย "Davisson-Germer 'Electron Scattering' Experiment")

↓

สามารถบรรยาย "พฤติกรรม" ของ "อนุภาค" ได้ โดยใช้ "ฟังก์ชันคลื่น (wave function)"

ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\Psi(\vec{r}, t)$ {ใน "หนึ่ง" มิติ → $\Psi(x, t)$}

เนื่องจาก "คลื่น" มีลักษณะ "กระจายตัว" ดังนั้น การที่ "อนุภาค" แสดงสมบัติเป็น "คลื่น"

จะทำให้ "ไม่สามารถระบุตำแหน่งของอนุภาคได้อย่างแม่นยำ"

↓

บอกได้เพียงว่า "ความน่าจะเป็น (probability)" (หรือ "โอกาส")

ที่จะ "พบอนุภาค" ใน "บริเวณต่างๆ" มีมากน้อยเพียงใด

↓

มี "ความไม่แน่นอน (Uncertainty)" ในการวัด/ระบุ "ตำแหน่งของอนุภาค" → "Δx"

"ฟังก์ชันคลื่น" ของ "คลื่นสสาร" จะมีค่า "ไม่เป็นศูนย์" ใน "บริเวณที่มีโอกาสพบอนุภาค" (หรือ "บริเวณที่อนุภาคสามารถอยู่ได้") และ "เป็นศูนย์" ใน "บริเวณที่ไม่มีโอกาสพบอนุภาค"

↓

"ฟังก์ชันคลื่น" ที่ "มีลักษณะแบบนี้" คือ "กลุ่มคลื่น (wave packet)"

ซึ่งสามารถสร้างได้โดย การนำ "ฟังก์ชันคลื่น" แบบ "ฮาร์มอนิก" (หรือแบบ "ซายน์")

[Harmonic (หรือ Sinusoidal) Wave Functions]

ที่มี "แอมพลิจูด A" "ความยาวคลื่น λ" และ "ความถี่ f" ต่างกัน มารวมกัน

$$\Psi(x,t) = \sum_i A_i \sin(k_i x - \omega_i t)$$

↓

มี "ความไม่แน่นอน" ในการวัด/ระบุ "ความยาวคลื่น" ของ "คลื่นสสาร" → "$\Delta\lambda$"

("ความยาวคลื่นเฉลี่ย" จะเท่ากับ "ความยาวคลื่นเดอบรอยด์" ของ "คลื่นสสาร")

↓

มี "ความไม่แน่นอน" ในการวัด/ระบุ "โมเมนตัม (เชิงเส้น)" ของ "อนุภาค" → "Δp"

“ฟังก์ชันคลื่น” แบบ “ฮาร์มอนิก” (หรือแบบ “ซายน์”)

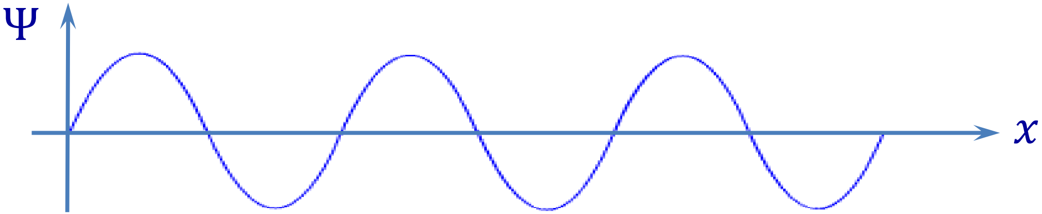
$$\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

จะมี “ความยาวคลื่น” ที่ “แน่นอน” $\left(\lambda = \dfrac{2\pi}{k}\right)$

→ ใช้บรรยาย “อนุภาค” ที่มี “โมเมนตัม (เชิงเส้น)” ที่ “แน่นอน” $\left(p = \dfrac{h}{\lambda}\right)$

แต่ จะ “ไม่” สามารถบอกว่า “อนุภาค” อยู่ที่ “ตำแหน่งไหน”

เนื่องจาก ไม่มีตำแหน่งใดบนแกน x ที่มีความแตกต่างจากตำแหน่งอื่นๆ อย่างชัดเจน



พิจารณากรณีที่ นำ "ฟังก์ชันคลื่น" แบบ "ฮาร์มอนิก" 2 ฟังก์ชัน ที่มี "แอมพลิจูด A" เท่ากัน แต่มี "เลขคลื่น k" ("ความยาวคลื่น λ") และ "ความถี่เชิงมุม ω" ("ความถี่ f") ต่างกันเล็กน้อย $\{\Psi_1(x,t) = A\sin(k_1x - \omega_1t)$ และ $\Psi_2(x,t) = A\sin(k_2x - \omega_2t)\}$ มารวมกัน

$\rightarrow$ $$\Psi(x,t) = A\sin(k_1x - \omega_1t) + A\sin(k_2x - \omega_2t)$$

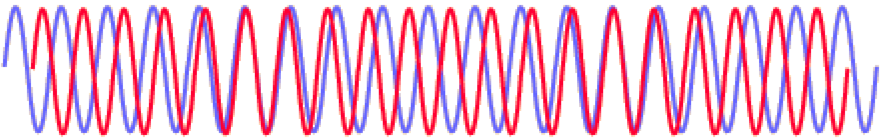
จาก $$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

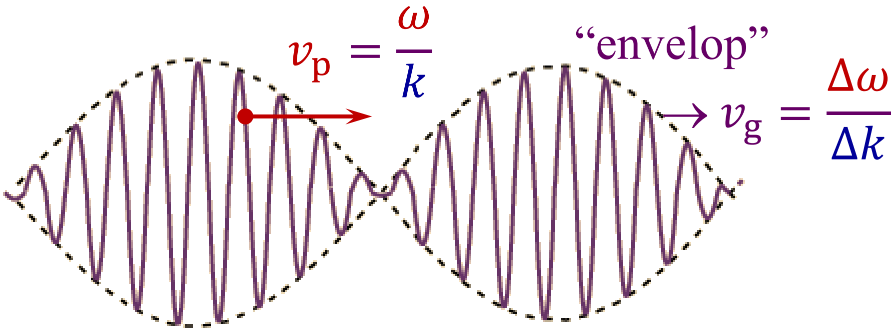
$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

จะได้ $$\Psi(x,t) = 2A\cos\left[\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\sin(kx - \omega t)$$

เมื่อ $$\Delta k = k_2 - k_1, \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\Psi_1(x,t) = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) \text{ และ } \Psi_2(x,t) = A\sin(k_2 x - \omega_2 t)$$





(http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/beat.html)

$$\Psi(x,t) = \underbrace{2A\cos\left[\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]}_{\text{“envelop”}}\sin(kx - \omega t)$$

เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ซึ่งเรียกว่า "ความเร็วกลุ่ม (group velocity)"

แสดงถึง "การเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูด" ของ "ผลรวม"

ความยาวคลื่น "โต" (Δk เล็ก)

ความถี่ "ต่ำ" ($\Delta\omega$ เล็ก)

"envelop"

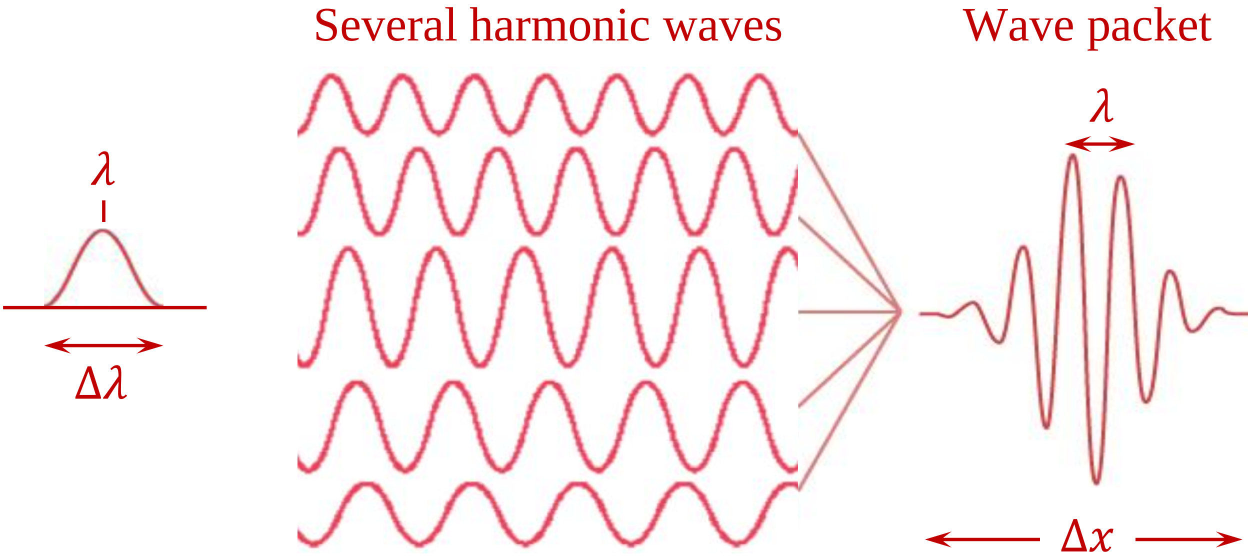
$$\Psi(x,t) = 2A\cos\left[\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\sin(kx - \omega t)$$

ความถี่ "สูง"

เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v_p = \frac{\omega}{k}$ เรียกว่า

"ความเร็วเฟส (phase velocity)"

ถ้า นำ “ฟังก์ชันคลื่นแบบฮาร์มอนิก” ที่มี “การกระจาย” ของ “แอมพลิจูด” กับ “ความยาวคลื่น” อย่าง “ต่อเนื่อง” ในช่วง “$\Delta\lambda$” มารวมกัน จะได้ “ฟังก์ชันคลื่น” ที่มีค่า “ไม่เป็นศูนย์” เฉพาะในบริเวณ “Δx” → “wave packet”: ถ้า “$\Delta\lambda$” มีขนาด “โตขึ้น” → “Δx” จะมีขนาด “เล็กลง”



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/imgmod2/unc3.gif
https://saniaheba.files.wordpress.com/2018/01/screen-shot-2018-01-28-at-4-45-06-pm-e1517154397938.png

สามารถแสดงได้ว่า “Δx” และ “Δp” (ซึ่งสัมพันธ์กับ “$\Delta\lambda$” ผ่าน “de Broglie’s relation”) จะมีความสัมพันธ์กันตาม “หลักความไม่แน่นอน” ของ “ไฮเซนเบิร์ก”

(Heisenberg’s Uncertainty Principle)

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar$$

“Δx” = “ความไม่แน่นอน” ในการวัด/ระบุ “ตำแหน่งของอนุภาค”

“Δp” = “ความไม่แน่นอน” ในการวัด/ระบุ “โมเมนตัม (เชิงเส้น)” ของ “อนุภาค”

$$\downarrow$$

“ไม่” สามารถทราบ “ตำแหน่ง” และ “โมเมนตัม” ได้แน่นอน “พร้อมๆ กัน”

ถ้า $\Delta p = 0$ (รู้ “โมเมนตัม” ที่ “แน่นอน”) จะได้ $\Delta x \to \infty$ (“ไม่” สามารถบอกตำแหน่งได้)

$\rightarrow$ “Minimum” Uncertainty : $\Delta x\, \Delta p = \hbar$

เป็น “ผลโดยตรง” จาก “wave nature” ของ “อนุภาค” ซึ่ง “ไม่สามารถกำจัดได้”

เมื่อคำนึงถึง “Uncertainty” เนื่องจากสาเหตุอื่นๆ (เช่น กระบวนการวัด) จะได้

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar$$

Werner Karl Heisenberg (1901-1976)

นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน

1932 Nobel Prize in Physics

"for the creation of quantum mechanics,
the application of which has, inter alia, led to
the discovery of the allotropic forms of hydrogen"

http://philosophica.blog.tiscali.it/files/2018/03/wernerkarlheisenberg.jpg

เนื่องจาก "กลุ่มคลื่น (wave packet)" เป็น "ตัวแทนของอนุภาค" (ในรูปของคลื่น) ดังนั้น "ความเร็ว" ของ "กลุ่มคลื่น" ซึ่งก็คือ "ความเร็วกลุ่ม (group velocity, v_{g})"

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \rightarrow \quad v_{\mathrm{g}} = \frac{d\omega}{dk}$$

จะเท่ากับ "ความเร็ว" ของ "อนุภาค" (particle velocity, v)

สำหรับ "อนุภาค" ที่มี "มวล m" และ "ความเร็ว v": ตาม "de Broglie's Hypothesis"

→ "ความถี่เชิงมุม" เดอบรอยด์: $\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{E}{h}\right) = \frac{2\pi(\gamma mc^2)}{h}$

$$\omega = \frac{2\pi mc^2}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{2\pi mc^2}{h}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{2\pi mv}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

→ “เลขคลื่น” เดอบรอยด์: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\left(\frac{p}{h}\right) = \frac{2\pi(\gamma m v)}{h}$

$$k = \frac{2\pi m v}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{2\pi m v}{h}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{2\pi m}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right\} = \frac{2\pi m}{h}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dv}{dk} = \frac{h}{2\pi m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

ดังนั้น "ความเร็วกลุ่ม (group velocity, v_g)" คือ

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv}\frac{dv}{dk} = \left\{\frac{2\pi mv}{h}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\right\}\left\{\frac{h}{2\pi m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right\} = v$$

ซึ่งเท่ากับ "ความเร็ว" ของ "อนุภาค" (particle velocity, v)

ในขณะที่ "ความเร็วเฟส (phase velocity, v_p)" คือ

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\left\{\frac{2\pi mc^2}{h}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right\}}{\left\{\frac{2\pi mv}{h}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right\}} = \frac{c^2}{v} > c$$

ซึ่ง "ไม่มี physical meaning"

(8) “ฟังก์ชันคลื่น” และ “ความน่าจะเป็น” (“ฟังก์ชันคลื่น” บอก “อะไร” กับเรา)

The Fifth Solvay International Conference (October 1927)

(founded by the Belgian industrialist “Ernest Solvay” in 1912)

Back: Auguste Piccard, Émile Henriot, Paul Ehrenfest, Édouard Herzen, Théophile de Donder, Erwin Schrödinger, JE Verschaffelt, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Ralph Fowler, Léon Brillouin.

Middle: Peter Debye, Martin Knudsen, William Lawrence Bragg, Hendrik Anthony Kramers, Paul Dirac, Arthur Compton, Louis de Broglie, Max Born, Niels Bohr.

Front: Irving Langmuir, Max Planck, Marie Curie, Hendrik Lorentz, Albert Einstein, Paul Langevin, Charles-Eugène Guye, CTR Wilson, Owen Richardson

17 of the 29 attendees were or became Nobel Prize winners.

Max Born (1882-1970)

นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน-อังกฤษ

1954 Nobel Prize in Physics

“for his fundamental research in quantum mechanics, especially for his statistical interpretation of the wavefunction”

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f7/Max_Born.jpg/240px-Max_Born.jpg

"ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(\vec{r},t)$" อาจเป็น "complex" function $\rightarrow$ "ไม่บอก" อะไรกับเรา "โดยตรง"

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) \equiv$$ "probability density" หรือ "probability distribution"

"โอกาส" ที่จะ "พบอนุภาค" ใน "หนึ่งหน่วยปริมาตร" (ที่มีจุดกึ่งกลางอยู่ที่ "$\vec{r}$") ที่ "เวลา t"

$\Psi^*(\vec{r},t)$ คือ "complex conjugate" ของ $\Psi(\vec{r},t)$

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 dV =$$ "โอกาส" ที่จะ "พบอนุภาค" ใน "ปริมาตรเล็กๆ dV" (ที่มีจุดกึ่งกลางอยู่ที่ "$\vec{r}$") ที่ "เวลา t"

"Normalization Condition"

"โอกาสทั้งหมด" ที่จะ "พบอนุภาค" จะมีค่าเท่ากับ "หนึ่ง"

(อนุภาคจะต้องอยู่ที่ใดที่หนึ่ง)

$$\iiint_{\text{all space}} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1$$

ในกรณีที่ "อนุภาค" เคลื่อนที่ได้เฉพาะใน "หนึ่งมิติ" (ในแนวแกน x):

"ฟังก์ชันคลื่น" $\rightarrow \quad \Psi(x,t)$

"probability density" $\rightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$

$|\Psi(x,t)|^2 dx =$ "โอกาส" ที่จะ "พบอนุภาค" ใน "ช่วงระยะสั้นๆ dx" (ระหว่าง x ถึง $x + dx$) ที่ "เวลา t"

"Normalization Condition": $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$

$\int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x,t)|^2 dx =$ "โอกาส" ที่จะ "พบอนุภาค" ในช่วงจาก x_1 ถึง x_2 ที่ "เวลา t"

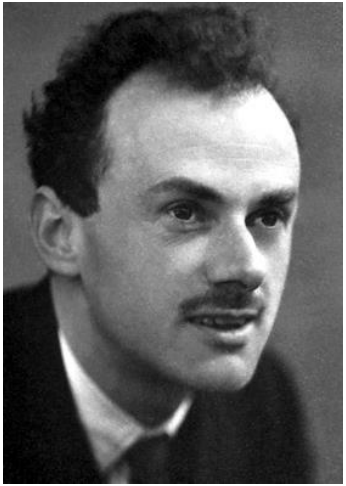
(9) “สมการคลื่น” ของ “ชโรดิงเจอร์” (Schrödinger Wave Equation)

1933 Nobel Prize in Physics

“for the discovery of new productive forms of atomic theory”

← Erwin Schrödinger
(1887-1961)
นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย

Paul Adrien Maurice Dirac →
(1902-1984)
นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ-อเมริกัน



https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/

ในกรณี “อนุภาค”:

เราบรรยาย “พฤติกรรม (การเคลื่อนที่)” ของ “อนุภาค” โดยบอก/ระบุว่า

ตำแหน่ง ($\vec{r}$) ความเร็ว ($\vec{v}$) ความเร่ง ($\vec{a}$)

และ “ปริมาณอื่นๆ” [เช่น โมเมนตัม ($\vec{p}$) พลังงานจลน์ (E_k)]

เปลี่ยนกับ “เวลา” อย่างไร

ปริมาณเหล่านี้หาได้ โดยใช้ “กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton’s Laws of Motion)”

$\rightarrow$ แก้ “สมการการเคลื่อนที่” $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ $\rightarrow$ หา $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ และ “ปริมาณอื่นๆ” ได้

ในกรณีที่ “อนุภาค” แสดงสมบัติเป็น “คลื่น”:

เราจะบรรยาย “พฤติกรรม” ของ “อนุภาค” โดยใช้ “ฟังก์ชันคลื่น”

ซึ่งหาได้โดยการแก้ “สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์ (Schrödinger Wave Equation)”

สำหรับ "อนุภาค" ที่มี "มวล m" เคลื่อนที่/อยู่ ในบริเวณที่มี "พลังงานศักย์ $V(\vec{\boldsymbol{r}})$" จะได้ว่า "สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบขึ้นกับเวลา" (Time-Dependent Schrödinger Wave Equation) คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{\boldsymbol{r}},t)+V(\vec{\boldsymbol{r}})\Psi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$\vec{\nabla}^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\equiv$ "Laplacian" Operator และ $\vec{\nabla}\equiv$ "Del" operator

ใน Cartesian Coordinate System (x,y,z) $\rightarrow$

$$\vec{\nabla}=\hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{e}}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{และ} \quad \vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

กรณีที่ "อนุภาค" เคลื่อนที่ได้เฉพาะใน "หนึ่งมิติ" (ในแนวแกน x):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$\rightarrow$ ต้อง "แก้สมการ" เพื่อหา $\Psi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ หรือ $\Psi(x,t)$

วิธีการ "มอง-จำ" Schrödinger Wave Equation: (กรณี "สาม" มิติ)

(i) เขียน "พลังงานรวม (Total Energy หรือ Hamiltonian)" ของ "อนุภาค/ระบบ"

$$E = K + V = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\vec{\boldsymbol{r}}) = H$$

(ii) เปลี่ยน "ปริมาณต่างๆ" เป็น "Operator (ตัวดำเนินการ)":

$$\vec{\boldsymbol{p}} \to \vec{\boldsymbol{p}}_{\text{op}} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\text{op}} = \vec{\boldsymbol{r}} \qquad V(\vec{\boldsymbol{r}}) \to V_{\text{op}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$E \to E_{\text{op}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{หรือ} \quad H \to H_{\text{op}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$E = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\vec{\boldsymbol{r}}) \;\to\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{\boldsymbol{r}})$$

(iii) นำไป "operate" บน "ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$":

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) + V(\vec{\boldsymbol{r}})\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$$

วิธีการ "มอง-จำ" Schrödinger Wave Equation: (กรณี "หนึ่ง" มิติ)

(i) เขียน "พลังงานรวม (Total Energy หรือ Hamiltonian)" ของ "อนุภาค/ระบบ"

$$E = K + V = \frac{p^2}{2m} + V(x) = H$$

(ii) เปลี่ยน "ปริมาณต่างๆ" เป็น "Operator (ตัวดำเนินการ)":

$$p \rightarrow p_{\mathrm{op}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad x \rightarrow x_{\mathrm{op}} = x \qquad V(x) \rightarrow V_{\mathrm{op}}(x) = V(x)$$

$$E \rightarrow E_{\mathrm{op}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{หรือ} \quad H \rightarrow H_{\mathrm{op}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

(iii) นำไป "operate" บน "ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(x,t)$":

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

“สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ ‘ไม่ขึ้น’ กับเวลา”
(Time-Independent Schrödinger Wave Equation)
(กรณี “สาม” มิติ)

ในกรณีที่ “พลังงานศักย์” ไม่ขึ้นกับเวลา “อย่างชัดเจน” (ไม่มี t ในสมการของพลังงานศักย์)

สามารถเขียน “ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$” ในรูป

“ผลคูณ” ของ “ส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (spatial part): $\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$”

กับ “ส่วนที่ขึ้นกับเวลา (temporal part): $T(t)$”

$$\Psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \psi(\vec{\boldsymbol{r}})\, T(t)$$

แทนลงใน Schrödinger Wave Equation จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2[\psi(\vec{\boldsymbol{r}})\, T(t)] + V(\vec{\boldsymbol{r}})[\psi(\vec{\boldsymbol{r}})\, T(t)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\psi(\vec{\boldsymbol{r}})\, T(t)]$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) + V(\vec{\boldsymbol{r}})\psi(\vec{\boldsymbol{r}})\, T(t) = i\hbar\psi(\vec{\boldsymbol{r}})\frac{\partial}{\partial t}T(t)$$

"หารตลอดทั้งสมการ" ด้วย "$\psi(\vec{r})\,T(t)$" จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\vec{r})}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = E \text{ (ค่าคงตัว)}$$

ขึ้นกับ x เท่านั้น ขึ้นกับ t เท่านั้น

(ต่อไปจะพบว่า ค่าคงตัว "E" คือ "พลังงาน" ของ "อนุภาค")

"ส่วนที่ขึ้นกับเวลา (temporal part): $T(t)$"

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = E \rightarrow i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = E \rightarrow \frac{dT(t)}{T(t)} = -i\left(\frac{E}{\hbar}\right)dt$$

"integrate" เทียบกับ "เวลา" $\rightarrow \quad \ell n[T(t)] = -i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t$

$$T(t) = exp\left[-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t\right] = exp[-i\omega t] = e^{-i\omega t}$$

$$\left\{\because\ \omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{E}{h}\right) = \frac{E}{\hbar}\right\}$$

"ส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (spatial part): $\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$"

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) + V(\vec{\boldsymbol{r}})\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) = E\,\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

"สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ 'ไม่ขึ้น' กับเวลา"
(Time-Independent Schrödinger Wave Equation)

$\downarrow$

"$\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$" จะขึ้นกับลักษณะของ "พลังงานศักย์ $V(\vec{\boldsymbol{r}})$"

$$\Psi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \psi(\vec{\boldsymbol{r}})\,T(t) = \psi(\vec{\boldsymbol{r}})\,e^{-i\omega t}$$

หาเฉพาะ "$\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$" โดยการแก้ "สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ 'ไม่ขึ้น' กับเวลา"

“สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ ‘ไม่ขึ้น’ กับเวลา”
(Time-Independent Schrödinger Wave Equation)
(กรณี “หนึ่ง” มิติ)

ในกรณีที่ “พลังงานศักย์” ไม่ขึ้นกับเวลา “อย่างชัดเจน” (ไม่มี t ในสมการของพลังงานศักย์)

สามารถเขียน “ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(x,t)$” ในรูป

“ผลคูณ” ของ “ส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (spatial part): $\psi(x)$”

กับ “ส่วนที่ขึ้นกับเวลา (temporal part): $T(t)$”

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\,T(t)$$

แทนลงใน Schrödinger Wave Equation จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\psi(x)\,T(t)] + V(x)[\psi(x)\,T(t)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\psi(x)\,T(t)]$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)\,T(t) = i\hbar\psi(x)\frac{\partial}{\partial t}T(t)$$

“หารตลอดทั้งสมการ” ด้วย “$\psi(x)\, T(t)$” จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x) = i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = E \text{ (ค่าคงตัว)}$$

ขึ้นกับ x เท่านั้น ขึ้นกับ t เท่านั้น

(ต่อไปจะพบว่า ค่าคงตัว “E” คือ “พลังงาน” ของ “อนุภาค”)

“ส่วนที่ขึ้นกับเวลา (temporal part): $T(t)$”

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = E \rightarrow i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = E \rightarrow \frac{dT(t)}{T(t)} = -i\left(\frac{E}{\hbar}\right)dt$$

“integrate” เทียบกับ “เวลา” $\rightarrow \quad \ell n[T(t)] = -i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t$

$$T(t) = exp\left[-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t\right] = exp[-i\omega t] = e^{-i\omega t}$$

$$\left\{\because \omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{E}{h}\right) = \frac{E}{\hbar}\right\}$$

“ส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (spatial part): $\psi(x)$”

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

“สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ ‘ไม่ขึ้น’ กับเวลา”
(Time-Independent Schrödinger Wave Equation)

$\downarrow$

“$\psi(x)$” จะขึ้นกับลักษณะของ “พลังงานศักย์ $V(x)$”

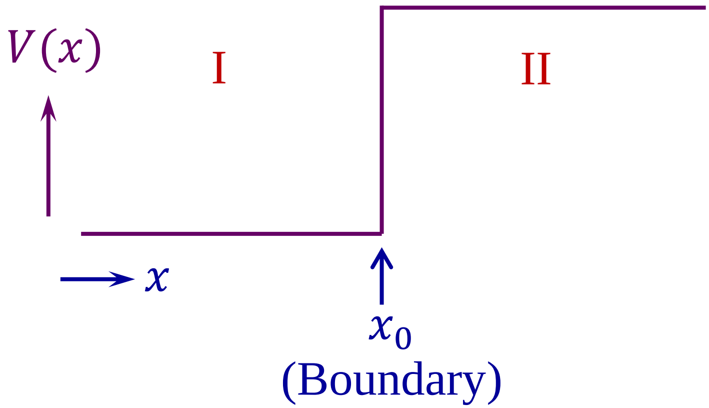
$$\Psi(x,t) = \psi(x)\,T(t) = \psi(x)\,e^{-i\omega t}$$

หาเฉพาะ “$\psi(x)$” โดยการแก้ “สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ ‘ไม่ขึ้น’ กับเวลา”

เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) :

ในกรณีที่ "พลังงานศักย์ $V(x)$" เปลี่ยนกับ "ตำแหน่ง x" ในลักษณะ "ที่ไม่ต่อเนื่อง"

"ฟังก์ชันคลื่น" จะมีค่า "ต่อเนื่อง" แบบ "เรียบ" ตรงบริเวณ "ขอบ/รอยต่อ (boundary)"



$$\psi_{\mathrm{I}}(x_0) = \psi_{\mathrm{II}}(x_0)$$

$$\left(\frac{d\psi_{\mathrm{I}}}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\right)_{x_0}$$

(10) ตัวอย่างการใช้ "สมการคลื่น" ของ "ชโรดิงเจอร์"

(10.1) อนุภาคอิสระ ("Free" Particles)

"อิสระ" → " ไม่มีแรงภายนอกกระทำ" → "พลังงานศักย์ $V(x)$" เป็น "ศูนย์"

"สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลา"

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

จะ "ลดรูป" เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x)$$

"จัดรูปใหม่" จะได้

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi(x) \qquad \text{(a)}$$

"Second-Order" Differential Equation

$\psi(x)$ จะอยู่ในรูป "Exponential Function" (หา "อนุพันธ์" แล้ว ยัง "มีรูปเหมือนเดิม")

สมมุติให้ $\psi(x) = Ae^{\alpha x}$ [A และ α เป็น “ค่าคงตัว” (ซึ่งต้องหา)] แทนลงใน (a) จะได้

$$\alpha^2 A e^{\alpha x} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) A e^{\alpha x} \rightarrow \alpha^2 = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) = -k^2 \rightarrow \alpha = \pm ik$$

เมื่อ $k^2 = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)$ หรือ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\psi(x) = A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx} = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

“exponential function” ที่มี “argument” เป็น “จำนวนจินตภาพ”

สามารถเขียนได้ในเทอมของ “trigonometric functions”

ต้องหา A_1, A_2 และ k (หรือ A, B และ k)

โดยทั่วไป “k” จะหาได้จาก “เงื่อนไขขอบเขต” ซึ่งในกรณีนี้ “ไม่มี” → “k” มีค่าเท่าไรก็ได้

ส่วน A_1 และ A_2 (หรือ A และ B) จะหาได้จาก “เงื่อนไขขอบเขต” (ซึ่งในกรณีนี้ “ไม่มี”)

และ “normalization condition” (ซึ่งไม่สามารถใช้กับกรณีนี้)

เพื่อที่จะ "ตีความคำตอบที่ได้" ในเทอมของ "คลื่น" เลือกใช้ "exponential form" ซึ่งจะได้ "complete" time-dependent wave function ในรูป

$$\Psi(x,t) = \psi(x)T(t) = \left(A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

คลื่นที่เคลื่อนที่ไปทางขวา →

$$\Psi(x,t) = A_1 e^{+i(kx-\omega t)} + A_2 e^{-i(kx+\omega t)}$$

← คลื่นที่เคลื่อนที่ไปทางซ้าย

จากรูปแบบของฟังก์ชันคลื่น → "k" คือ "เลขคลื่น (wave number)"

ถ้าต้องการ "คลื่น" ที่บรรยาย "อนุภาค" ที่ "เคลื่อนที่ไปทางขวา" → เลือกให้ A_2 เป็น "ศูนย์" → "probability density" คือ

$$|\Psi(x,t)|^2 = |A_1|^2$$

ซึ่ง "มีค่าคงที่" → มี "โอกาส" ที่จะพบอนุภาค "เท่าๆ กัน" ที่ "ทุกตำแหน่ง"

(เป็น completely unlocalized particle)

ความสัมพันธ์ระหว่าง A_1, A_2, A และ B:

$$\psi(x) = A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx} = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

ใช้ Euler's formula, $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, จะได้

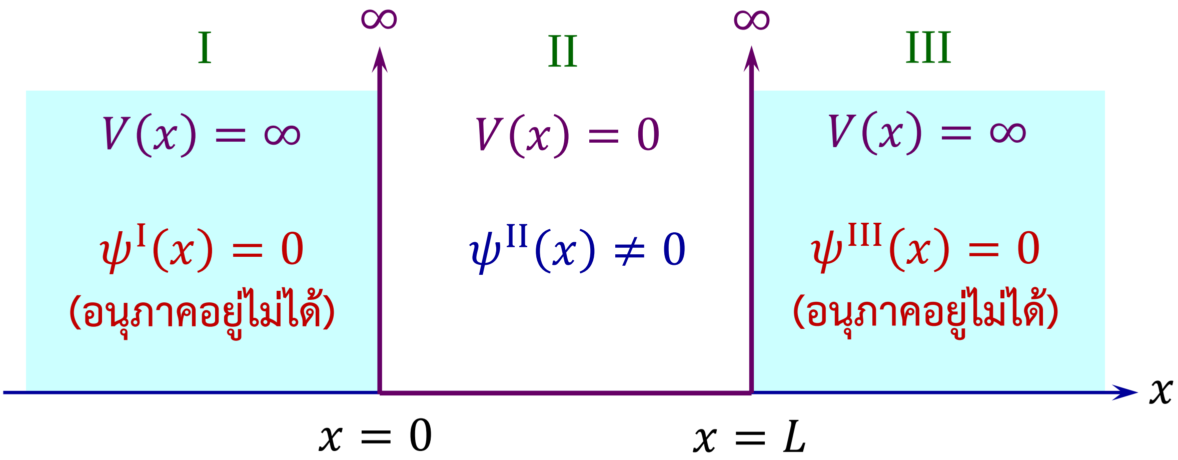
$$A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx} = A_1[\cos(kx) + i\sin(kx)] + A_2[\cos(kx) - i\sin(kx)]$$

{ ระลึกว่า $\cos(-kx) = \cos(kx)$ และ $\sin(-kx) = -\sin(kx)$}

$$A_1 e^{+ikx} + A_2 e^{-ikx} = (A_1 + A_2)\cos(kx) + i\,(A_1 - A_2)\sin(kx)$$

นั่นคือ $A = (A_1 + A_2)$ และ $B = i(A_1 - A_2)$

(10.2) อนุภาคในบ่อศักย์หนึ่งมิติสูงอนันต์



อนุภาค “ไม่สามารถอยู่” ใน “บริเวณ I” และ “บริเวณ III” $\rightarrow$ $\psi^{\mathrm{I}}(x) = 0 = \psi^{\mathrm{III}}(x)$

ใน “บริเวณ II” $\rightarrow$ “พลังงานศักย์” เป็น “ศูนย์” $\rightarrow$ “เหมือนกับ” กรณีของ “อนุภาคอิสระ”

$$\psi^{\mathrm{II}}(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

เมื่อ $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ หรือ $E = \left(\dfrac{k^2\hbar^2}{2m}\right)$

ค่าคงตัว A, B และ k หาได้จาก "เงื่อนไขขอบเขต" และ "normalization condition":

ใช้ "เงื่อนไขขอบเขต" ที่ "$x = 0$" → "ฟังก์ชันคลื่น" ต้อง "ต่อเนื่อง" ที่ "รอยต่อ $x = 0$"

$$\psi^{\mathrm{I}}(x = 0) = 0 = \psi^{\mathrm{II}}(x = 0)$$

จะได้ $$\psi^{\mathrm{II}}(x = 0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A = 0$$

→ $$\boxed{\psi^{\mathrm{II}}(x) = B\sin(kx)}$$

ใช้ "เงื่อนไขขอบเขต" ที่ "$x = L$" → "ฟังก์ชันคลื่น" ต้อง "ต่อเนื่อง" ที่ "รอยต่อ $x = L$"

$$\psi^{\mathrm{II}}(x = L) = 0 = \psi^{\mathrm{III}}(x = L)$$

จะได้ $$\psi^{\mathrm{II}}(x = L) = B\sin(kL) = 0 \rightarrow \sin(kL) = 0$$

"คณิตศาสตร์" → $$kL = 0, \pi, 2\pi, \cdots \rightarrow k = 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \cdots$$

"ฟิสิกส์" → "k" เป็น "ศูนย์" ไม่ได้ → $$\boxed{k = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \cdots}$$

{ ถ้า $k = 0 \rightarrow kx = 0 \rightarrow \psi(x) = 0$ (สำหรับทุกค่าของ x) → "ไม่มีอนุภาค" }

จาก $$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=\frac{\pi}{L},\frac{2\pi}{L},\cdots=\frac{n\pi}{L}\quad \text{เมื่อ}\quad n=1,2,3,\cdots$$

จะได้ว่า “พลังงาน” ของ “อนุภาค” คือ

$$E\rightarrow E_n=\frac{k_n^2\hbar^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}=n^2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)\quad \text{เมื่อ}\quad n=1,2,3,\cdots$$

→ เรียก “n” ว่า “เลขควอนตัม (Quantum Number)”

→ “พลังงาน” ของ “อนุภาค” มีค่า “ไม่ต่อเนื่อง”

→ “พลังงานต่ำสุด” (≡ “zero-point” energy) “ไม่เป็นศูนย์”: $E_{\min}=E_1=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

→ เรียก “สถานะ” ที่มี “พลังงานต่ำสุด” ว่า “สถานะพื้น (ground state)”
และเรียก “สถานะ” ที่มี “พลังงานถัดไป” ว่า

“สถานะถูกกระตุ้นลำดับที่หนึ่ง” (first-excited state), “สถานะถูกกระตุ้นลำดับที่สอง” (second-excited state), …

"โมเมนตัม (เชิงเส้น)" ของ อนุภาค คือ

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad \rightarrow \quad p_n = \hbar k_n = \hbar\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \frac{nh}{2L}$$

"มีค่าไม่ต่อเนื่อง"

"ฟังก์ชันคลื่น" ของ "อนุภาค" คือ

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0 \le x \le L \\ 0, & x > L \end{cases}$$

→ ค่าคงตัว "B" หาได้จาก "normalization condition":

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

→ ในกรณีนี้ จะได้

$$B^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = B^2\left(\frac{L}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{2}\right)$$

เปลี่ยนตัวแปร: ให้ $u = \left(\frac{n\pi}{L}\right)x$ จะได้ $x = \left(\frac{L}{n\pi}\right)u$ ดังนั้น $dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)du$

"limit of integration" จะเปลี่ยนจาก "$x = 0$ ถึง $x = L$" เป็น "$u = 0$ ถึง $u = n\pi$"

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)\int_0^{n\pi} \sin^2 u\,du$$

จาก $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = (1 - \sin^2 u) - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u$ จะได้

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)\frac{1}{2}\int_0^{n\pi}[1 - \cos(2u)]\,du$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{2n\pi}\right)\left[u - \frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{n\pi}$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(\frac{L}{2n\pi}\right)\left[(n\pi - 0) - \frac{1}{2}\{\sin(2n\pi) - \sin(0)\}\right] = \frac{L}{2}$$

จาก $$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0 \le x \le L \\ 0, & x > L \end{cases}$$ โดยที่ $B = \sqrt{\frac{2}{L}}$

จะได้ว่า "ความหนาแน่น" ของ "โอกาส (ที่จะพบอนุภาค)" [probability density] คือ

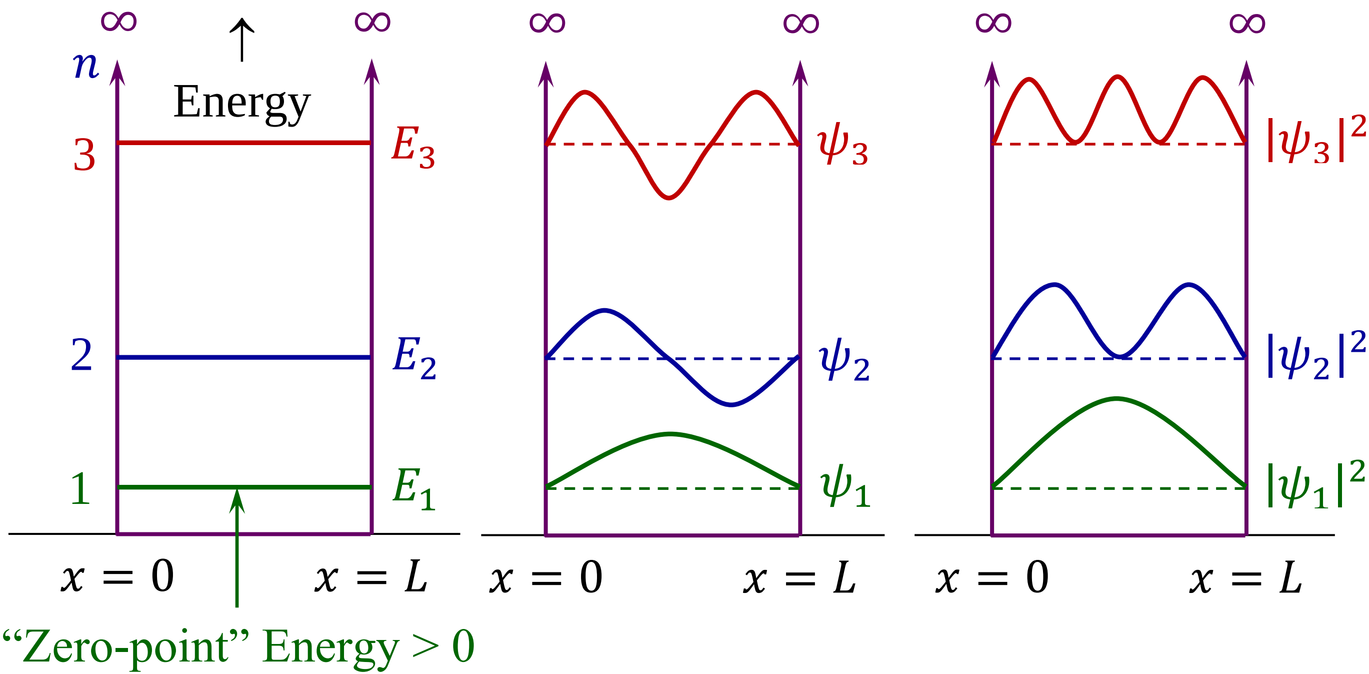
$$|\psi_n(x)|^2 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0 \le x \le L \\ 0, & x > L \end{cases}$$

→ "โอกาส" ที่จะพบอนุภาค "ในบริเวณต่างๆ" จะมีค่า "ไม่เท่ากัน"

ใน "ground state" จะมี "โอกาสพบอนุภาคมากที่สุด" ที่ตำแหน่ง "$x = L/2$"

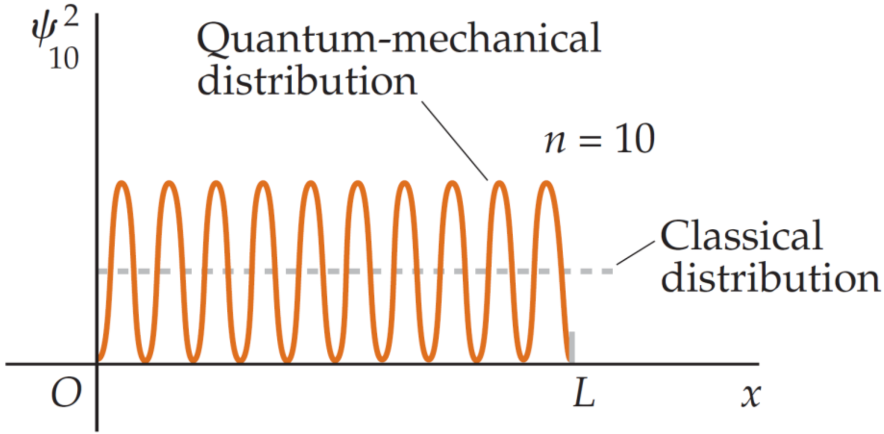
ใน "1^{st} excited state" → ที่ตำแหน่ง "$x = L/4$" และ "$x = 3L/4$"

ใน "2^{nd} excited state" → ที่ตำแหน่ง "$x = L/6$", "$x = L/2$" และ "$x = 5L/6$"



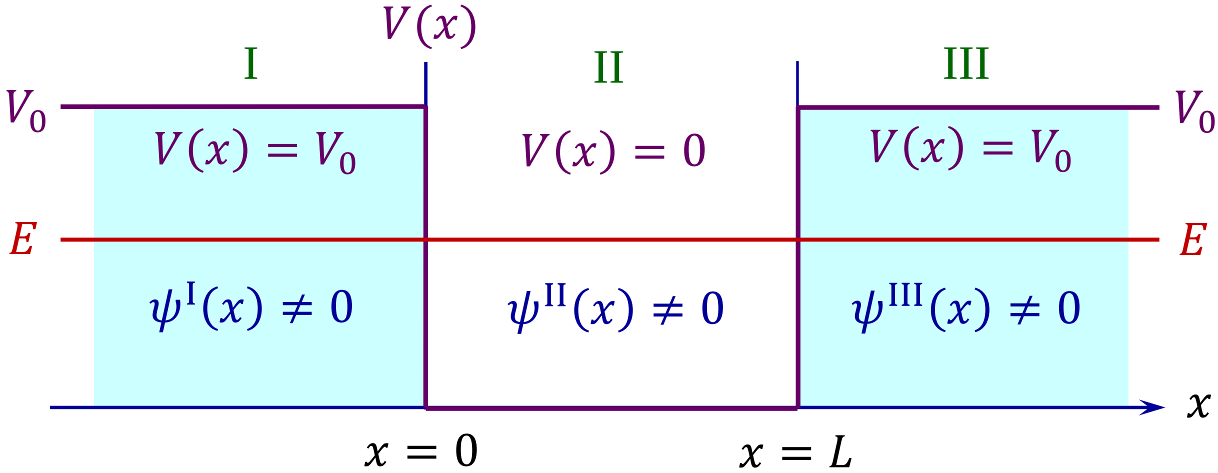
"พลังงาน, E_n", "ฟังก์ชันคลื่น, $\psi_n(x)$" และ "ความหนาแน่นของโอกาส, $|\psi_n(x)|^2$"
สำหรับ $n = 1, 2, 3$ ของ "อนุภาค" ใน "บ่อศักย์หนึ่งมิติสูงอนันต์"

เมื่อ “n” มีค่า “โตมากๆ” $\rightarrow$ “โอกาส” ที่จะพบอนุภาค “ที่ทุกตำแหน่ง” มีค่า “เท่ากัน”
(“เหมือนกับ” ที่ทำนายโดย “Classical Physics”)



Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics – Tipler & Mosca – 6e (2008), p.1191

(10.3) อนุภาคในบ่อศักย์หนึ่งมิติที่มีความสูงจำกัด



"พลังงานศักย์" $\rightarrow$ $$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le L \\ V_0, & L < x \end{cases}$$

จะพิจารณากรณีที่ $E < V_0$ $\rightarrow$ อนุภาค "ถูกกัก" อยู่ภายในบ่อศักย์

บริเวณ I ($x < 0$) $\rightarrow V(x<0) = V_0 > E$:

"สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลา"

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

จะ "ลดรูป" เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi^{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} + V_0\psi^{\mathrm{I}}(x) = E\,\psi^{\mathrm{I}}(x)$$

"จัดรูปใหม่" จะได้

$$\frac{d^2\psi^{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} = \left[\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\right]\psi^{\mathrm{I}}(x) = \kappa^2\psi^{\mathrm{I}}(x)$$

เมื่อ $\kappa^2 \equiv \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$ หรือ $\kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$\psi(x)$ จะอยู่ในรูป "Exponential Function" (หา "อนุพันธ์" แล้ว ยัง "มีรูปเหมือนเดิม")

สมมุติให้ $$\psi^{\mathrm{I}}(x) = Ae^{\alpha x}$$

เมื่อ A และ α เป็น "ค่าคงตัว" (ซึ่งต้องหา)

แทนลงใน $$\frac{d^2\psi^{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} = \kappa^2\psi^{\mathrm{I}}(x)$$

จะได้ $$\alpha^2 Ae^{\alpha x} = \kappa^2 Ae^{\alpha x} \rightarrow \alpha^2 = \kappa^2 \rightarrow \alpha = \pm\kappa$$

ดังนั้น $$\psi^{\mathrm{I}}(x) = Ae^{+\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

เนื่องจาก $-\infty \leq x < 0$ ดังนั้น "B" ต้องเป็น "ศูนย์" มิฉะนั้น $\psi^{\mathrm{I}}(x = -\infty) = \infty$

ดังนั้น $$\psi^{\mathrm{I}}(x) = Ae^{+\kappa x}$$

→ "ฟังก์ชันคลื่นภายนอกบ่อศักย์" (ที่มีความสูงจำกัด) มีค่า "ไม่เป็นศูนย์" โดยจะมีค่า "ลดลงแบบ exponential" (ในบริเวณนี้ x เป็น "ลบ")

→ มี "โอกาสที่จะพบอนุภาค" ในบริเวณ "ภายนอกบ่อศักย์"

บริเวณ II $(0 \leq x \leq L)$ $\rightarrow V(0 \leq x \leq L) = 0$:

ใน "บริเวณ II" → "พลังงานศักย์" เป็น "ศูนย์" → "เหมือนกับ" กรณีของ "อนุภาคอิสระ"

$$\psi^{\mathrm{II}}(x) = C\cos(kx) + D\sin(kx)$$

เมื่อ $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ หรือ $E = \left(\dfrac{k^2\hbar^2}{2m}\right)$

บริเวณ III $(L < x)$ $\rightarrow V(L < x) = V_0 > E$:

ใน "บริเวณ III" → "พลังงานศักย์" เป็น "V_0" → "เหมือนกับ" ใน "บริเวณ I"

$$\psi^{\mathrm{III}}(x) = Fe^{+\kappa x} + Ge^{-\kappa x}$$

เนื่องจาก $L < x \leq \infty$ ดังนั้น "F" ต้องเป็น "ศูนย์" มิฉะนั้น $\psi^{\mathrm{III}}(x = +\infty) = \infty$

ดังนั้น

$$\psi^{\mathrm{III}}(x) = Ge^{-\kappa x}$$

→ "ลดลงแบบ exponential" & มี "โอกาสที่จะพบอนุภาค" ในบริเวณ "ภายนอกบ่อศักย์"

I	II	III
$(x < 0)$	$(0 \le x \le L)$	$(L < x)$
$V(x) = V_0$	$V(x) = 0$	$V(x) = V_0$
$\psi^{\mathrm{I}}(x) = Ae^{+\kappa x}$	$\psi^{\mathrm{II}}(x) = C\cos(kx) + D\sin(kx)$	$\psi^{\mathrm{III}}(x) = Ge^{-\kappa x}$

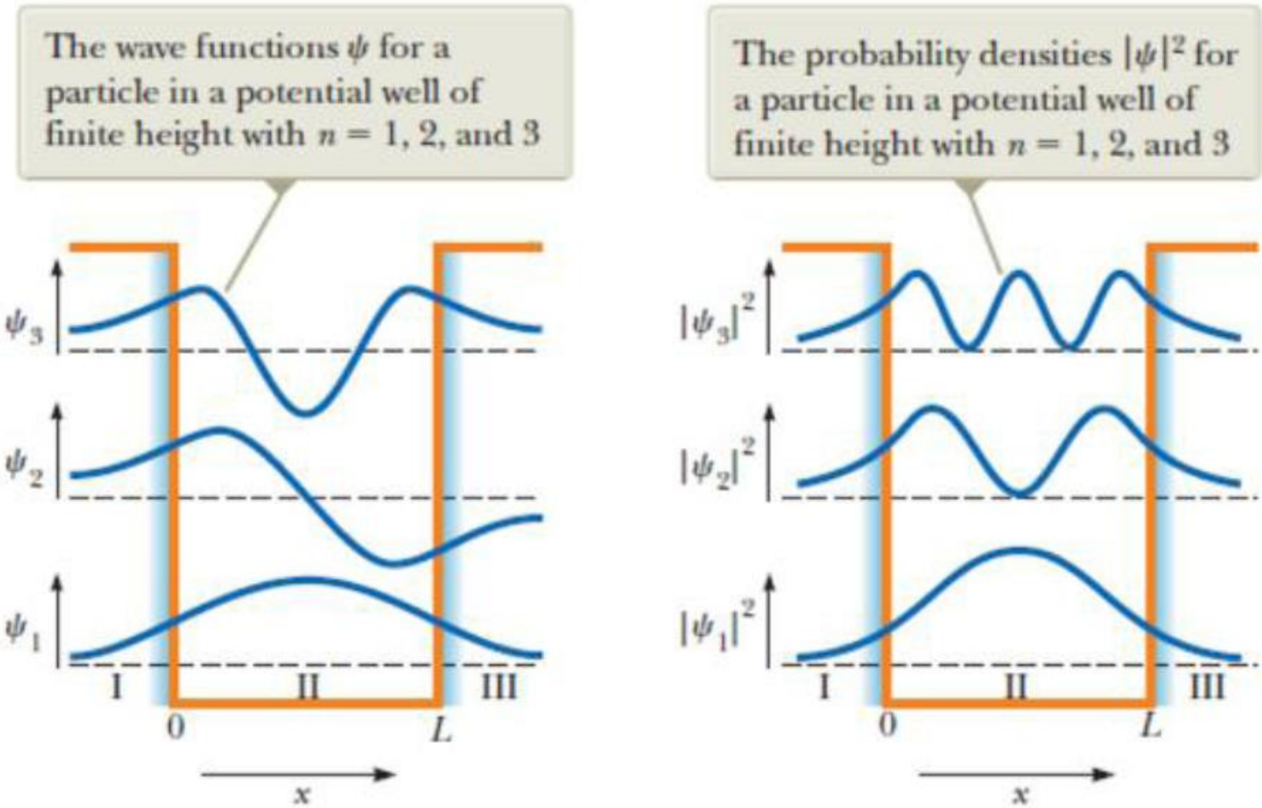
เมื่อ $\kappa \equiv \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ และ $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ค่าคงตัว "A", "C", "D", "G", และ "k" ($\rightarrow$ "E") จะหาได้จาก "เงื่อนไขขอบเขต"

ที่ $x = 0 \rightarrow$ $\psi^{\mathrm{I}}(x=0) = \psi^{\mathrm{II}}(x=0)$ และ $\left[\dfrac{d\psi^{\mathrm{I}}}{dx}\right]_{x=0} = \left[\dfrac{d\psi^{\mathrm{II}}}{dx}\right]_{x=0}$

ที่ $x = L \rightarrow$ $\psi^{\mathrm{II}}(x=L) = \psi^{\mathrm{III}}(x=L)$ และ $\left[\dfrac{d\psi^{\mathrm{II}}}{dx}\right]_{x=L} = \left[\dfrac{d\psi^{\mathrm{III}}}{dx}\right]_{x=L}$

และ "normalization condition" : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$



https://d2vlcm61l7u1fs.cloudfront.net/media%2Fbd6%2Fbd6544e0-7217-42b3-9f7f-f44b36b4e508%2FphpZN2ZQn.png

แบบฝึกหัด "กลศาสตร์ควอนตัม"

1. จงหาค่าความยาวคลื่นกำลังสูงสุด (peak wavelength) ที่แผ่ออกมาจากร่างกายมนุษย์โดยอาศัยกฎของวีน [9.35×10^3 nm]

"λ_{max}" แปร "ผกผัน" กับ "อุณหภูมิสัมบูรณ์"

อุณหภูมิร่างกายมนุษย์ = 37 °C = (273 + 37) K = 310 K

$$\lambda_{max}(T) = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ (\mathrm{m \cdot K})}{T\ (\mathrm{K})} \rightarrow \lambda_{max}(310\ K) = 9.35 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

2. จงหาความถี่ของโฟตอนซึ่งมีโมเมนตัม 0.020 MeV/c [4.8×10^{18} Hz]

สำหรับ "photon" :

$$E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \left(\frac{h}{\lambda}\right)c = pc \rightarrow f = \frac{pc}{h}$$

$$f = \frac{\left(\dfrac{0.020 \times 10^{6} \times 1.6 \times 10^{-19}\ J}{3 \times 10^{8}\ m/s}\right)(3 \times 10^{8}\ m/s)}{(6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot s)} = 4.83 \times 10^{18}\ \mathrm{Hz}$$

3. กำหนดให้รัศมีดวงอาทิตย์เท่ากับ 6.96×10^{8} m กำลังของรังสีที่แผ่ออกมาจากดวงอาทิตย์เป็น 3.8×10^{26} W จงหา

(ก) อุณหภูมิของผิวดวงอาทิตย์ ถ้าคิดว่าการแผ่รังสีของมันเป็นวัตถุดำ [5.75×10^{3} K]

การแผ่รังสีของวัตถุดำ $\rightarrow P_{total}(T) = \sigma A T^4 \rightarrow P_{total}^{SUN}(T) = \sigma(4\pi R_{SUN}^2)T^4$

$$T^4 = \frac{P_{total}^{SUN}(T)}{\sigma(4\pi R_{SUN}^2)} = \frac{3.8 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{\left(5.67 \times 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}\right)(4\pi(6.96 \times 10^{8}\ \mathrm{m})^2)}$$

$$T^4 = 1.1 \times 10^{15}\ \mathrm{K}^4 \rightarrow T = 5{,}759\ \mathrm{K}$$

(ข) จากคำตอบในข้อ (ก) จงหาความยาวคลื่นที่มีความเข้มมากที่สุดจากสเปกตรัมของรังสีที่แผ่ออกมา [504 nm]

$$\lambda_{max}(T) = \frac{2.898\ \times 10^{-3}\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{K})}{T\ (\mathrm{K})} \rightarrow \lambda_{max}(5{,}759\ \mathrm{K}) = 5.03 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

4. ถ้าความยาวคลื่นแสงสูงสุดที่ทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมพอดีคือ 300 nm จงหาพลังงานยึดเหนี่ยวระหว่างอิเล็กตรอนกับอะตอม [4.13 eV]

$$W = \left(E_{photon}\right)_{min} = hf_{min} = h\left(\frac{c}{\lambda_{max}}\right) = \frac{hc}{\lambda_{max}}$$

$$W = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{(300 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})} = 6.626 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$W = \frac{6.626 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 4.14\ \mathrm{eV}$$

5. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นคลื่นระนาบความถี่ 300 MHz ตกกระทบตั้งฉากกับพื้นที่ $50\ \mathrm{cm}^2$ ถ้าความเข้มของคลื่นดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $9 \times 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$ จงหาอัตราการตกกระทบของโฟตอนบนพื้นผิว (จำนวนโฟตอนต่อ 1 วินาที)

[2.26×10^{17} photons/s]

พื้นที่ $50\ \mathrm{cm}^2 = 50 \times (10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = 50 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$

พลังงานที่ตกกระทบพื้นที่ $50\ \mathrm{cm}^2$ ใน 1 วินาที = ความเข้ม × พื้นที่ × 1 s

$$= \left(9 \times 10^{-6}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right) \times (5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2) \times 1\ \mathrm{s} = 4.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{J}$$

พลังงานของโฟตอน 1 ตัว = $hf = (6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(300 \times 10^{6}\ \mathrm{Hz})$

$$= 1.9878 \times 10^{-25}\ \mathrm{J}$$

$$\frac{\text{จำนวนโฟตอนที่ตกกระทบ}}{\text{พื้นที่ } 50\ \mathrm{cm}^2 \text{ ใน 1 วินาที}} = \frac{4.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{J}}{1.9878 \times 10^{-25}\ \mathrm{J/\text{ตัว}}} = 2.26 \times 10^{17}\ \text{ตัว}$$

6. ถ้าความยาวคลื่นขีดเริ่มสำหรับปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกของทังสเตนมีค่า 230 nm จงหาความยาวคลื่นของแสงที่ฉายลงบนผิวของทังสเตนดังกล่าวแล้วทำให้มีอิเล็กตรอนพลังงาน 1.5 eV หลุดออกมา [180 nm]

$$W = hf_0 = h\left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = (6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})\left(\frac{3\times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{230\times 10^{-9}\ \mathrm{m}}\right)$$

$$W = 8.64\times 10^{-19}\ \mathrm{J} = \frac{8.64\times 10^{-19}}{1.6\times 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 5.4\ \mathrm{eV}$$

$$K_{electron} = 1.5\ \mathrm{eV} = 1.5\times 1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2.4\times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

จาก $K_{electron} = E_{photon} - W$ จะได้ $E_{photon} = K_{electron} + W$

$$\rightarrow \quad E_{photon} = 6.9\ \mathrm{eV} = 11.04\times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

จาก $E_{photon} = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$ จะได้ $\lambda = \frac{hc}{E_{photon}}$

ปริมาณ "hc" เป็นปริมาณที่ "พบบ่อย" ใน modern physics → นิยมบอกค่า "รวมกัน" เป็น

$$hc = (6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}) = 1.9878 \times 10^{-25}\ \mathrm{J \cdot m}$$

หรือ

$$hc = 1.9878 \times 10^{-25}\left(\frac{\mathrm{eV}}{1.6 \times 10^{-19}}\right) \cdot (10^{9}\ \mathrm{nm}) = 1240\ \mathrm{eV \cdot nm}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \mathrm{eV \cdot nm}}{6.9\ \mathrm{eV}} = 180\ \mathrm{nm}$$

7. จงหาเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ซึ่งมีความยาวคลื่นเดิม 0.040 nm หลังจากเกิด Compton scattering กับอิเล็กตรอน โดยมุมกระเจิงของรังสีเอกซ์มีค่า 90° [6.08%]

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\theta = 90^{\circ} \rightarrow \cos\theta = cos90^{\circ} = 0 \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}$$

$$\lambda' = 0.040\ \text{nm} + \frac{(6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})}{(9.1\times10^{-31}\ \text{kg})(3\times10^{8}\ \text{m/s})} = 0.04243\ \text{nm}$$

$$\text{เปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงความยาวคลื่น} = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)\times 100$$

$$= \left(\frac{0.00243}{0.04}\right)\times 100 = 6.075\ \%$$

8. รังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 0.0300 nm เกิด Compton scattering กับอิเล็กตรอนซึ่งเดิมอยู่นิ่ง ถ้ามุมกระเจิงของรังสีเอกซ์คือ 60^0 จงหาความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่เปลี่ยนไปและพลังงานของอิเล็กตรอนหลังจากการชน [0.0312 nm, 1.59 keV]

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\theta = 60° \rightarrow \cos\theta = cos60° = 0.5 \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{2mc} = 0.0312\ \text{nm}$$

$$K_{electron} = E_{photon} - E'_{photon} = hf - hf' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'\lambda}\right)$$

$$K_{electron} = 1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}\left(\frac{0.0312\ \text{nm} - 0.0300\ \text{nm}}{0.0312\ \text{nm} \times 0.0300\ \text{nm}}\right) = 1.59\ \text{keV}$$

9. จงพิสูจน์ว่าพลังงานจลน์สูงสุด (K_{max}) ของอิเล็กตรอนหลังจากเกิดปรากฏการณ์คอมพ์ตันเขียนได้เป็น

$$K_{\text{max}} = \frac{E^2}{E + \frac{mc^2}{2}}$$

เมื่อ E คือพลังงานของโฟตอนก่อนเกิดการชน

"พลังงานจลน์" ของ "electron" คือ $K_e = E - E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$

ซึ่งจะมีค่าสูงสุด เมื่อ λ' มีค่าโตที่สุด $\rightarrow$ $(K_e)_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'_{max}}$

จาก $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ $\rightarrow \lambda'$ จะมีค่าโตที่สุด เมื่อ $\theta = 180°$

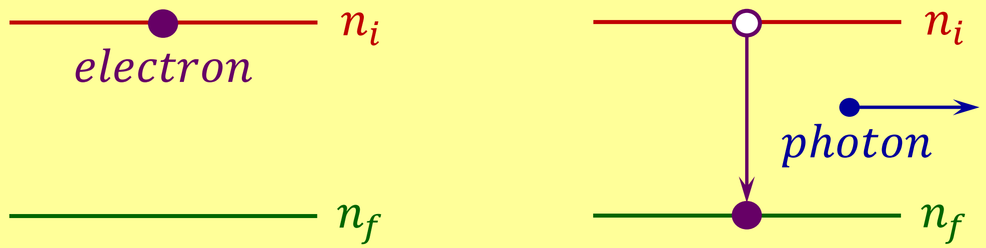
$$\lambda'_{max} = \lambda + \frac{2h}{mc}$$

$$(K_e)_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'_{max}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \frac{2h}{mc}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1 + \frac{2h}{\lambda mc}\left(\frac{c}{c}\right)}$$

$$(K_e)_{max} = \left(\frac{hc}{\lambda}\right) - \frac{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)}{1 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)\frac{2}{mc^2}} = E - \frac{E}{1 + \frac{2E}{mc^2}} = \frac{E\left(1 + \frac{2E}{mc^2}\right) - E}{1 + \frac{2E}{mc^2}}$$

$$(K_e)_{max} = \frac{\frac{2E^2}{mc^2}}{1 + \frac{2E}{mc^2}} \times \frac{\left(\frac{mc^2}{2}\right)}{\left(\frac{mc^2}{2}\right)} = \frac{E^2}{E + \frac{mc^2}{2}}$$

10. จงหาความยาวคลื่นของโฟตอนซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมจาก $n_i = 5$ มายัง $n_f = 2$ [4346 Å]



$$\Delta E_{atom} = E_{photon} = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

$$hydrogen\ atom:\ E_n = -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

11. จงหา recoil speed ของอะตอมของไฮโดรเจน เมื่ออะตอมนี้ปล่อยโฟตอน แล้วเปลี่ยนระดับพลังงานจาก $n = 3$ มายัง $n = 1$ (กำหนดให้ตอนแรก อะตอมของไฮโดรเจนอยู่นิ่ง) $[V = 8hR_H/9M]$

“H atom” in $n = 3$ state

“H atom” in $n = 1$ state

“conservation of linear momentum” $\rightarrow$ $\vec{P} = -\vec{p}$

$$P = MV = p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

ในกรณีนี้ $n_i = 3$ และ $n_f = 1 \rightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8R_H}{9}$ และ $V = \frac{8hR_H}{9M}$

12. อนุภาคโปรตอนมีพลังงานจลน์เท่ากับ 1.0 MeV ถ้าความไม่แน่นอนในการวัดโมเมนตัมของโปรตอนมีค่า 5% จงหาความไม่แน่นอนที่น้อยที่สุดที่เกิดขึ้นกับการวัดตำแหน่ง [9.12×10^{-14} m]

$$K_{proton} = 1.0\ \mathrm{MeV} \ll E_{0,proton} = m_p c^2 = 938\ \mathrm{MeV} \quad \rightarrow K = \frac{p^2}{2m_p}$$

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$\rightarrow \quad p = \sqrt{2m_p K} = \sqrt{2(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(1 \times 10^{6} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J})}$$

$$p = 2.31 \times 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right) \times 100 = 5 \quad \rightarrow \quad \Delta p = \left(\frac{5}{100}\right) p = 1.16 \times 10^{-21}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar \quad \rightarrow \quad \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{2\pi \left(1.16 \times 10^{-21}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)} = 9.1 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}$$

13. อะตอมหนึ่งถูกกระตุ้นให้อยู่ในชั้นพลังงานที่มีพลังงานสูงกว่าสถานะพื้น 1.8 eV ถ้าช่วงเวลาที่อะตอมนี้อยู่ในสถานะถูกกระตุ้น มีค่า 2.0 μs ก่อนที่จะตกลงสู่สถานะพื้น จงหา

(ก) ความถี่และความยาวคลื่นของโฟตอนที่ปล่อยออกมาขณะที่อะตอมเกิด transition

[4.35×10^{14} Hz, 690 nm]

$$\Delta E_{atom} = E_{photon} = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

(ข) ความไม่แน่นอนในค่าพลังงานของโฟตอน [3.30×10^{-10} eV]

ใช้ "Uncertainty Relation" $\rightarrow \quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar = \dfrac{h}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \Delta E \geq \dfrac{h}{2\pi\,\Delta t}$

โดยที่ $\Delta t = 2.0\ \mu s = 2.0 \times 10^{-6}$ s

14. ฟังก์ชันของอนุภาคหนึ่งเขียนได้เป็น

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) & \text{for } -\dfrac{L}{4} \le x \le \dfrac{L}{4} \\ 0 & \text{for other values of } x \end{cases}$$

(ก) จงหาค่า A จาก normalization condition [$2/\sqrt{L}$]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-L/4}^{+L/4} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = A^2\left(\frac{L}{4}\right) = 1 \rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{L}}$$

(ข) จงหาโอกาสที่จะพบอนุภาคระหว่าง $x = 0$ ถึง $x = L/8$ [0.409]

$$\frac{4}{L}\int_{0}^{+L/8} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{4}{L}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{L}{8} + \left(\frac{L}{4\pi}\right)\right\}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} = 0.409$$

$$\int_{-L/4}^{+L/4} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L/4}^{+L/4} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[x]_{-L/4}^{+L/4} + \left(\frac{L}{4\pi}\right)\left[sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]_{-L/4}^{+L/4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{L}{4} - \left(-\frac{L}{4}\right)\right] + \left(\frac{L}{4\pi}\right)[sin(\pi) - \sin(-\pi)]\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{2} + 0\right\} = \frac{L}{4}$$

$$\int_{0}^{+L/8} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{+L/8} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right] dx$$

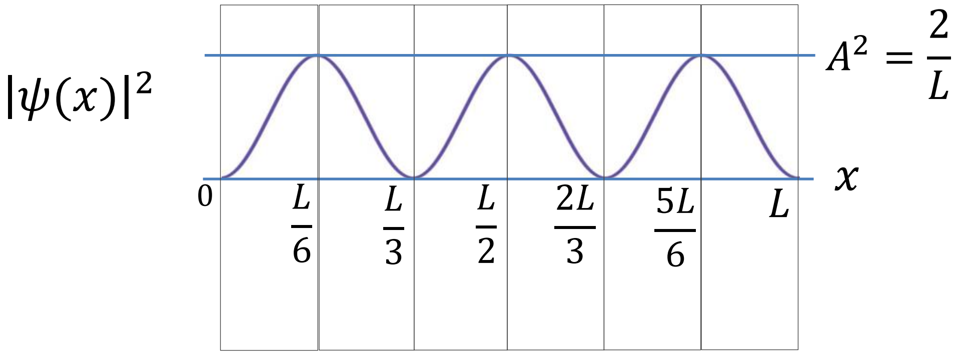
$$= \frac{1}{2}\left\{[x]_{0}^{+L/8} + \left(\frac{L}{4\pi}\right)\left[sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]_{0}^{+L/8}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{L}{8} - 0\right] + \left(\frac{L}{4\pi}\right)\left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{8} + \left(\frac{L}{4\pi}\right)\right\}$$

15. [F2548] อนุภาคเดี่ยวมวล m อยู่ภายในบ่อศักย์อนันต์หนึ่งมิติ กว้าง L ซึ่งหมายถึงพลังงานศักย์ของอนุภาคเท่ากับศูนย์ภายในบ่อ (ในช่วง $0 \leq x \leq L$) และมีค่าเป็นอนันต์ภายนอกบ่อ ถ้าอนุภาคนี้มีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \qquad \text{(ในช่วง } 0 \leq x \leq L\text{)} \quad \text{เมื่อ } A \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

(ก) จงเขียนกราฟระหว่าง $|\psi(x)|^2$ และ x ในช่วง $0 \leq x \leq L$ โดยระบุตำแหน่ง x ที่ $|\psi(x)|^2$ มีค่าต่ำสุดด้วย



(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $0 \leq x \leq L$

$$P(0 \leq x \leq L) = 1$$

[“โอกาสที่จะพบอนุภาคในทุกบริเวณที่อนุภาคสามารถอยู่ได้” จะเท่ากับ “หนึ่ง”]

(ค) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}$

$$P\left(\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

“พื้นที่ใต้กราฟ (ของ $|\psi(x)|^2$ กับ x) ในช่วง $\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}$”

มีค่าเป็น “หนึ่งในสาม” ของ “พื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด (ในช่วง $0 \leq x \leq L$)”

(ง) ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในช่วง $0 \leq x \leq \frac{L}{8}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{8}$ หรือไม่ ให้เหตุผลประกอบด้วย

“ไม่เท่า” เพราะ “พื้นที่ใต้กราฟ (ของ $|\psi(x)|^2$ กับ x) ในช่วง $0 \leq x \leq \frac{L}{8}$”

มีค่าไม่เท่ากับ “หนึ่งในแปด” ของ “พื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด (ในช่วง $0 \leq x \leq L$)”

(จ) จงเขียนสมการของชโรดิงเจอร์สำหรับอนุภาค ในช่วง $0 \leq x \leq L$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

(ฉ) จงใช้ผลจากข้อ (จ) เพื่อหาพลังงานของอนุภาคนี้

แทน $\psi(x) = A\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ ลงใน "สมการของชโรดิงเจอร์" ที่ได้ในข้อ (จ) จะได้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2\right]\psi(x) = E\,\psi(x) \;\rightarrow\; E = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

16. [F2553] อนุภาคมวล m ถูกกักอยู่ในบ่อศักย์อนันต์หนึ่งมิติ กว้าง L โดยที่พลังงานศักย์ของอนุภาคเท่ากับศูนย์ภายในบ่อ (ในช่วง $0 \le x \le L$) และมีค่าเป็นอนันต์ภายนอกบ่อ ถ้าอนุภาคนี้มีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (\text{ในช่วง } 0 \le x \le L) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(ก) จงเขียนสมการของชโรดิงเจอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาสำหรับอนุภาคนี้ ในช่วง $0 \le x \le L$

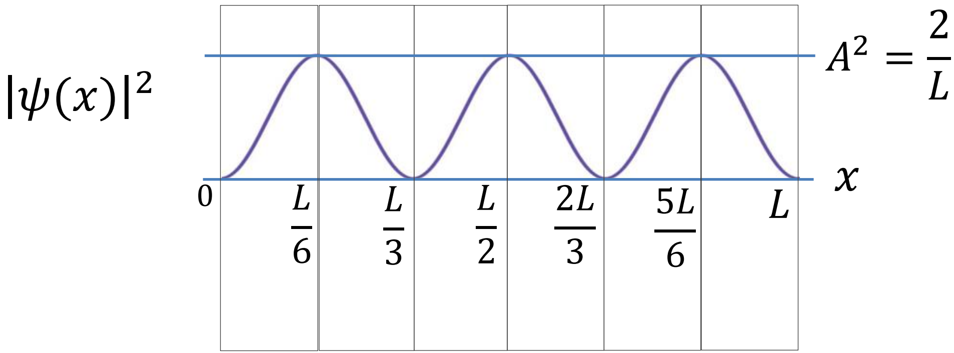
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} = E_n\psi_n(x)$$

(ข) จงใช้ผลจากข้อ (ก) เพื่อหาพลังงานรวมของอนุภาคนี้

แทน “$\psi_n(x)$” ลงใน “สมการของชโรดิงเจอร์” ที่ได้ในข้อ (ก) จะได้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \;\rightarrow\; E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

(ค) จงเขียนกราฟระหว่าง $|\psi_3(x)|^2$ และ x ในช่วง $0 \le x \le L$ โดยระบุค่าสูงสุดของกราฟ และค่าตำแหน่ง x ที่กราฟมีค่าต่ำสุด สูงสุด และเป็นศูนย์ด้วย



(ง) ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ในช่วง $0 \le x \le L/3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$P\left(\frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

"พื้นที่ใต้กราฟ (ของ $|\psi_3(x)|^2$ กับ x) ในช่วง $\frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3}$"

มีค่าเป็น "หนึ่งในสาม" ของ "พื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด (ในช่วง $0 \le x \le L$)"

(จ) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ในช่วง $0 \le x \le L/8$

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{8}\right) = \int_0^{L/8} |\psi_3(x)|^2\, dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/8} \sin^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx$$

เปลี่ยนตัวแปร $u = \dfrac{3\pi x}{L} \rightarrow dx = \left(\dfrac{L}{3\pi}\right) du$

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{8}\right) = \left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L}{3\pi}\right)\int_0^{3\pi/8} \sin^2 u\, du = \left(\frac{1}{3\pi}\right)\int_0^{3\pi/8} (1 - \cos 2u)\, du$$

$$\{\because \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = (1 - \sin^2 u) - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u\,\}$$

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{8}\right) = \left(\frac{1}{3\pi}\right)\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{3\pi/8} = \left(\frac{1}{3\pi}\right)\left[\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{8}\right) = \left(\frac{1}{3\pi}\right)\left[\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{3\pi - 2\sqrt{2}}{24\pi}$$

17. ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระ ($V = 0$) หนึ่งเขียนได้เป็น

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

โดยที่ A, B และ k เป็นค่าคงที่ ถ้า $\psi(x)$ เป็นคำตอบของสมการชโรดิงเจอร์ จงหาพลังงานของอนุภาคนี้ $\left[E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\right]$

แทน $$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

ลงใน "สมการชโรดิงเจอร์" สำหรับ "อนุภาคอิสระ": $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x)$$

จะได้ $$-\frac{\hbar^2}{2m}\{-k^2A\cos(kx) - k^2B\sin(kx)\} = E\,\{A\cos(kx) + B\sin(kx)\}$$

$\rightarrow$ $$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$$

18. อิเล็กตรอนตัวหนึ่งถูกจำกัดให้เคลื่อนที่อยู่ภายในกล่องหนึ่งมิติ โดยอยู่ที่สถานะพื้นซึ่งมีพลังงานเท่ากับ 2.0 eV

(ก) ความกว้างของกล่อง 1 มิติมีค่าเท่าใด [4.34 Å]

"กล่องหนึ่งมิติ" ↔ "บ่อศักย์หนึ่งมิติสูงอนันต์" (กว้าง L)

"พลังงาน" ของ "อนุภาค" คือ $E \rightarrow E_n = n^2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \cdots$

"สถานะพื้น" $\rightarrow$ $E = E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 2\,eV \rightarrow L = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2mE_1}} = \frac{h}{\sqrt{8mE_1}}$

$$L = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{8 \times (9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}) \times (2 \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J})}} = 4.34 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

(ข) อิเล็กตรอนต้องการพลังงานเท่าใดในการเปลี่ยนระดับพลังงานจากสถานะพื้นไปยังสถานะถูกกระตุ้นลำดับที่หนึ่ง [6.0 eV]

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 4E_1 - E_1 = 3E_1 = 6.0\ \mathrm{eV}$$

19. จงหาค่า A สำหรับฟังก์ชันคลื่น

$$\psi(x) = A\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

ซึ่งได้จากผลรวมของฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคที่ถูกขังอยู่ในกล่อง 1 มิติ กว้าง L

$[1/\sqrt{8.5\,L}]$

$$|\psi(x)|^2 = A^2\left\{\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 16\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 8\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\}$$

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$A^2\left\{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx + 16\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx + 8\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right\} = 1 \qquad (1)$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\}dx = \frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{L}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[L-\left(\frac{L}{2\pi}\right)\sin(2\pi)\right]-\left[0-\left(\frac{L}{2\pi}\right)\sin(0)\right]\right\} = \frac{L}{2} \qquad (2)$$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{1-\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right\}dx = \frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{L}{4\pi}\right)\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[L-\left(\frac{L}{4\pi}\right)\sin(4\pi)\right]-\left[0-\left(\frac{L}{4\pi}\right)\sin(0)\right]\right\} = \frac{L}{2} \qquad (3)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = 2\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2L}{\pi}\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)d\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] = \frac{2L}{3\pi}\left[\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L = 0 \qquad (4)$$

แทน (2), (3), และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$A^2\left\{\left(\frac{L}{2}\right)+16\left(\frac{L}{2}\right)+8(0)\right\}=A^2(8.5\,L)=1$$

$$\downarrow$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{8.5\,L}}$$

20. อนุภาคถูกกักอยู่ในบริเวณ $-a \leq x \leq a$ ของบ่อศักย์อนันต์กว้าง $2a$ โดย

$$\psi(x) = \left[A\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + B\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

จงหา A และ B $\left[|A| = |B| = 1/\sqrt{2a}\right]$

$$|\psi(x)|^2 = A^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + B^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 2AB\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\int_{-a}^{+a} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$A^2\int_{-a}^{+a}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)dx + B^2\int_{-a}^{+a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$\left.+2AB\int_{-a}^{+a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\right\} = 1 \qquad (1)$$

$$\int_{-a}^{+a}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}\left\{1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right\}dx = \frac{1}{2}\left[x+\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]_{-a}^{+a}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[a+\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin(\pi)\right]-\left[-a-\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin(-\pi)\right]\right\} = a \qquad (2)$$

$$\int_{-a}^{+a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right\}dx = \frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{a}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_{-a}^{+a}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[a-\left(\frac{a}{2\pi}\right)\sin(2\pi)\right]-\left[-a-\left(\frac{a}{2\pi}\right)\sin(-2\pi)\right]\right\} = a \qquad (3)$$

$$\int_{-a}^{+a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = 2\int_{-a}^{+a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)dx$$
$$= -2\left(\frac{2a}{\pi}\right)\int_{-a}^{+a}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)d\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right] = -\frac{4a}{3\pi}\left[\cos^3\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right]_{-a}^{+a} = 0 \quad (4)$$

แทน (2), (3), และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$A^2(a) + B^2(a) + 2AB(0) = a(A^2 + B^2) = 1$$

ถ้า $|A| = |B|$ จะได้ $2aA^2 = 1$

$$\downarrow$$

$$|A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

21. ถ้าฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนอิสระเขียนได้เป็น $\psi(x) = A\sin(5\times 10^{10}x)$ เมื่อ x มีหน่วยเป็น m จงหา

(ก) ความยาวคลื่นเดอบรอยล์ของอิเล็กตรอน [1.26×10^{-10} m]

(ข) โมเมนตัมของอิเล็กตรอน [5.26×10^{-24} kg·m/s]

(ค) พลังงานของอิเล็กตรอนในหน่วย eV [95 eV]

เทียบกับ $\psi(x) = A\sin(kx) = A\sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]$ จะได้ $k = 5\times 10^{10}\ \mathrm{m^{-1}}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\times 10^{10}\ \mathrm{m^{-1}}} = 1.26\times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626\times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{1.26\times 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 5.26\times 10^{-24}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$K = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(5.26\times 10^{-24}\ \mathrm{kg\cdot m/s})^2}{2\times(9.1\times 10^{-31}\ \mathrm{kg})} = 1.52\times 10^{-17}\ \mathrm{J} = 95\ \mathrm{eV}$$

22. เราสามารถพิจารณาได้ว่าอนุภาคแอลฟาภายในนิวเคลียสอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกับอนุภาคซึ่งถูกกักอยู่ในกล่อง 1 มิติกว้าง 1.0×10^{-14} m (ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของนิวเคลียส) จงหาพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคแอลฟาในระดับพลังงานต่ำสุด ($m_\alpha = 4 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg) [0.516 MeV, $3.31 \times 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$]

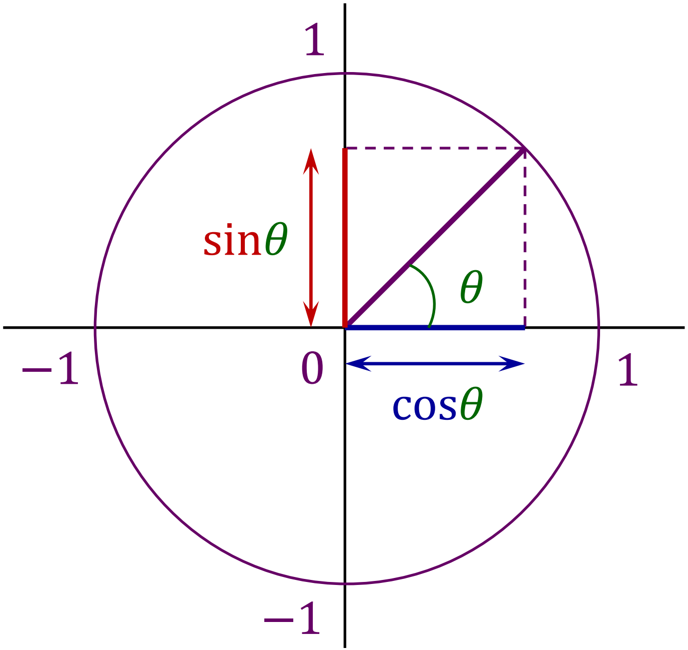
"พลังงาน" ของ "อนุภาคแอลฟา" ที่ "ถูกกัก" อยู่ใน "กล่อง 1 มิติ" กว้าง "L" คือ

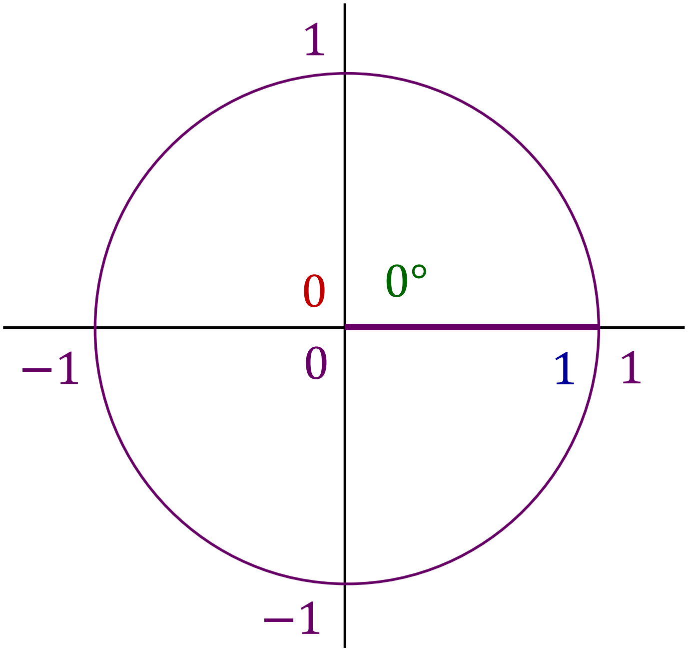
$$E_n = n^2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_\alpha L^2}\right) = n^2\left(\frac{h^2}{8m_\alpha L^2}\right) \quad \text{เมื่อ} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

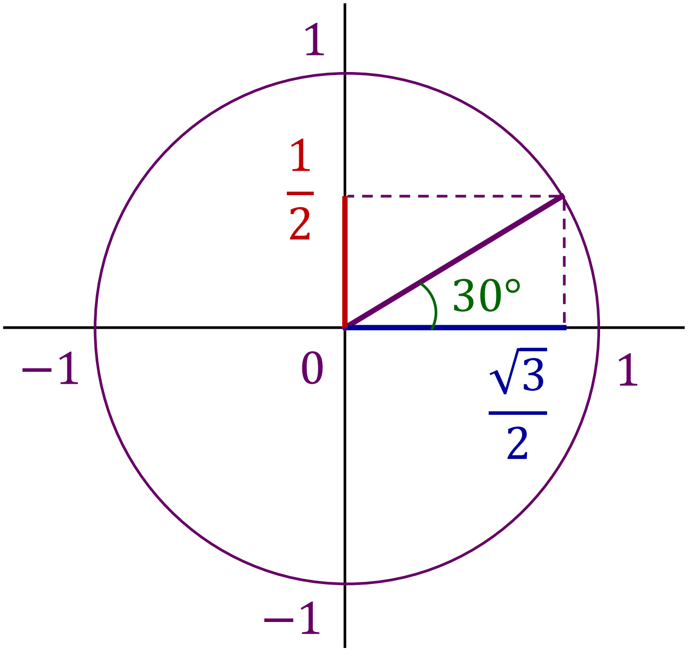
$$E_{min} = E_1 = \frac{h^2}{8m_\alpha L^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^2}{8 \times (4 \times 1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \times (1.0 \times 10^{-14}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 8.27 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} = \frac{8.27 \times 10^{-14}}{1.6 \times 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 5.15 \times 10^5\ \mathrm{eV} = 0.515\ \mathrm{MeV}$$

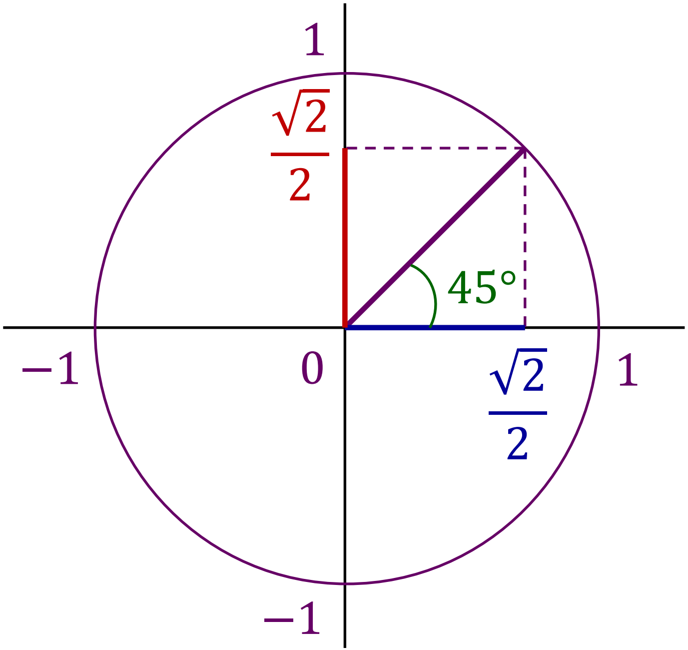
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \;\rightarrow\; p_n = \hbar k_n = \hbar\left(\frac{n\pi}{L}\right) \;\rightarrow\; p_{min} = \frac{\hbar\pi}{L} = \frac{h}{2L}$$


1
sinθ
θ
−1
0
1
cosθ
−1

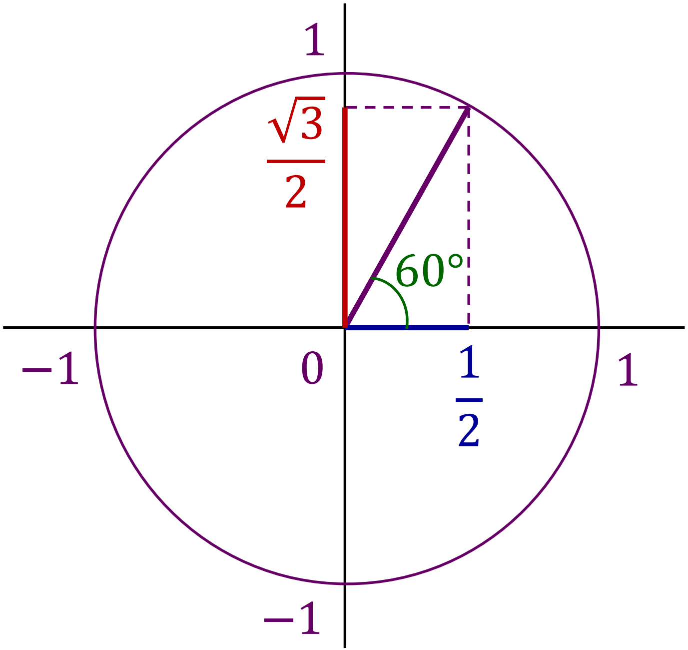

1
0
0°
−1
0
1
1
−1

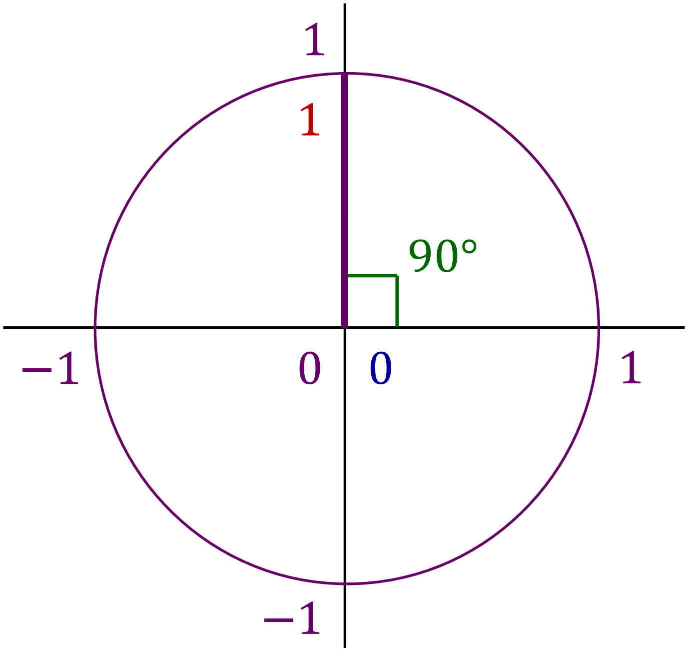


1
1/2
30°
−1
0
√3/2
1
−1



1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
45°
-1
0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
-1


1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°
−1
0
$\frac{1}{2}$
1
−1


1
1
90°
−1
0
0
1
−1